Blaga Mirela-Gabriela

Fişă de sinteză – Sisteme de ecuaţii liniare

Competenţe urmărite

- Rezolvarea şi analizarea sistemelor de ecuaţii liniare prin utilizarea unor metode adecvate.
- Modelarea unor situaţii-problemă cu ajutorul sistemelor de ecuaţii liniare.

Teorie

1. Sistem de ecuaţii liniare

- O ecuaţie liniară cu n necunoscute are forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + \ \dots + a_nx_n = b$, unde $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$, iar $a_1, a_2, \dots, a_n$ nu sunt toţi nuli.
- Un sistem de ecuaţii liniare este un ansamblu de ecuaţii liniare cu aceleaşi necunoscute, pentru care se caută valori ale necunoscutelor ce verifică simultan toate ecuaţiile.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \dots \quad\quad \dots \quad\quad \dots \quad\quad \dots \quad\quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

unde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R},\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},\ m, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

- Matricea coeficienţilor A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Matricea extinsă $\bar{A}$ se obţine prin adăugarea coloanei termenilor liberi la matricea coeficienţilor:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$$

3. Rangul unei matrice

- Un minor de ordin k al unei matrice este determinantul format cu elementele situate la intersecţia a k linii şi k coloane ale matricei.

- Rangul unei matrice A este ordinul maxim al unui minor nenul al matricei.
- $0 \leq \text{rang}(A) \leq \min\{m, n\}$ pentru o matrice A de tip $m \times n$.
- Pentru o matrice pătratică de ordinul 3 avem:
  dacă $\det(A) \neq 0$ atunci $\text{rang}(A) = 3$;
  dacă $\det(A) = 0$, dar există un minor de ordinul 2 nenul, atunci $\text{rang}(A) = 2$;
  dacă toți minorii de ordinul 2 sunt nuli, dar matricea are cel puțin un element nenul, atunci $\text{rang}(A) = 1$;
  dacă toate elementele matricei sunt nule, atunci $\text{rang}(A) = 0$.

4. Compatibilitatea unui sistem liniar

- Teorema Kronecker–Capelli.
  Sistemul liniar este compatibil dacă și numai dacă $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A})$.
- compatibil determinat: $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) = n$ → o singură soluție;
- compatibil nedeterminat: $\text{rang}(A) = \text{rang}(\bar{A}) < n$ → o infinitate de soluții;
- incompatibil: $\text{rang}(A) < \text{rang}(\bar{A})$ → nicio soluție.

5. Regula lui Cramer

- Pentru un sistem de trei ecuații cu trei necunoscute, dacă $\Delta = \det(A) \neq 0$, atunci sistemul este compatibil determinat și se poate rezolva prin regula lui Cramer:
  $x = \frac{\Delta x}{\Delta}, y = \frac{\Delta y}{\Delta}, z = \frac{\Delta z}{\Delta}$.
- Determinantul Δx se obține înlocuind în A coloana coeficienților lui x cu coloana termenilor liberi. Analog se construiesc Δy și Δz.
- Dacă $\det(A) = 0$, regula lui Cramer nu se aplică; compatibilitatea sistemului se studiază cu ajutorul rangurilor sau prin metoda Gauss.

6. Metoda Gauss

- Metoda Gauss constă în transformarea matricei extinse a sistemului într-o matrice eșalonată, prin transformări elementare asupra liniilor, de tipul: schimbarea a două linii între ele, înmulțirea unei linii cu un număr nenul sau adunarea la o linie a unui multiplu al altei linii.
- Aceste transformări conduc la un sistem echivalent, având aceeași mulțime de soluții. Din forma eșalonată se pot determina compatibilitatea sistemului și soluțiile sale.

Blaga Mirela-Gabriela

Exemplu

Rezolvaţi sistemul de ecuaţii liniare (S): $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-z=3 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases}$ prin regula lui Cramer.

Etape

1) Ataşăm sistemului (S) matricea coeficienţilor $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculăm determinantul matricei A: $\Delta=\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-6\neq 0$.

Prin urmare, sistemul este compatibil determinat. Aplicăm regula lui Cramer.

2) Pentru fiecare dintre determinanţii $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, înlocuim în matricea A coloana corespunzătoare necunoscutei cu coloana termenilor liberi.

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-12 \ \rightarrow\ x=\frac{-12}{-6}=2$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0 \ \rightarrow\ y=\frac{0}{-6}=0$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=6 \ \rightarrow\ z=\frac{6}{-6}=-1$$

3) Soluţia sistemului este $(x,y,z)=(2,0,-1)$.

Exerciţii

1. Rezolvaţi prin regula lui Cramer sistemul: $\begin{cases} x-y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ -x+y+z=1 \end{cases}$.

2. Studiaţi compatibilitatea sistemului în funcţie de $a\in\mathbb{R}$ şi rezolvaţi-l în cazurile compatibile: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ay-z=3 \\ 2x-ay+2z=2 \end{cases}$.

3. Rezolvaţi prin metoda Gauss sistemul: $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+y+2z=4 \end{cases}$.

Conexiune interdisciplinară

Chimie. Se amestecă trei soluții A, B și C ale aceleiași substanțe, având concentrațiile procentuale masice de 10%, 20%, respectiv 30%. Se obțin 100 g de soluție cu concentrația de 18%. Masa soluției A este dublul masei soluției C. Determinați masele soluțiilor A, B și C.

Idee de rezolvare

Notăm cu x, y, z masele, exprimate în grame, ale soluțiilor A, B și C. Din datele problemei obținem sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 0{,}1 \cdot x + 0{,}2 \cdot y + 0{,}3 \cdot z = 18 \\ x = 2z \end{cases}$$

Soluția sistemului este $(x, y, z) = (40, 40, 20)$.