Blaga Mirela-Gabriela

Fişă de sinteză – Matrice inversabile

Competenţe urmărite

- Verificarea inversabilităţii unei matrice pătratice.
- Aplicarea matricei inverse în rezolvarea ecuaţiilor matriceale.

Teorie

1. Definiţii

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătratică de ordin n.

- Matricea A este inversabilă dacă există o matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât: $A \cdot B = B \cdot A = I_n$.
- Dacă A este inversabilă, inversa sa se notează A^{-1}.
- Proprietate. Inversa unei matrice pătratice, dacă există, este unică.
- Proprietate. A este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.
- Matrice nesingulară: $\det(A) \neq 0$.
- Matrice singulară: $\det(A) = 0$.

2. Determinarea inversei unei matrice

- Dacă $\det(A) \neq 0$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^*$, unde A^* este matricea adjunctă a lui A.

Etape

1) Calculăm $\det(A)$. Dacă $\det(A) = 0$, atunci matricea A nu este inversabilă.

2) Scriem transpusa A^T.

3) Construim matricea adjunctă A^*, alcătuită din complementii algebrici ai lui A^T.

4) Aflăm inversa A^{-1}.

5) Verificăm $A \cdot A^{-1} = I_n$.

3. Rezolvarea ecuaţiilor matriceale

Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ matricele inversabile, $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, iar X matricea necunoscută.

Atunci:

- $A \cdot X = C \implies X = A^{-1} \cdot C$
- $X \cdot A = C \implies X = C \cdot A^{-1}$
- $A \cdot X \cdot B = C \implies X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Blaga Mirela-Gabriela

Exemplu

Determinaţi inversa matricei pătratice de ordinul doi: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Etape

1) Calculăm determinantul: $\det(A) = 2 \neq 0$.

2) Scriem transpusa $A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ și calculăm minorii (determinanţii d_{ij} obținuți prin eliminarea liniei i și a coloanei j din A^T): $d_{11} = 2, d_{12} = 4, d_{21} = 1, d_{22} = 3$.

3) Construim matricea adjunctă $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, unde $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot d_{ij}$.

Rezultă:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2, A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 4 = -4,$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1, A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3$

Deci $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4) Aflăm inversa: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot A^* = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5) Verificăm: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Exerciţii

1. Verificaţi dacă matricele sunt inversabile:

$a) \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$,

$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Determinaţi inversa matricei A:

$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$b) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Blaga Mirela-Gabriela

3. Rezolvaţi ecuaţia matriceală $A \cdot X = B$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Conexiune interdisciplinară

În informatică, matricele inverse sunt utilizate în rezolvarea sistemelor liniare, în transformările din grafica 3D şi în unele metode de optimizare.