

Blaga Mirela-Gabriela

Fișă de sinteză – Matrice

Competențe urmărite

- Aplicarea operațiilor cu matrice în contexte matematice.
 - Reprezentarea și interpretarea relațiilor liniare folosind matrice.
 - Determinarea proprietăților algebrice ale operațiilor (grup, monoid).
-

Teorie

1. Definiții

- O matrice cu m linii și n coloane este o funcție $f: \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$, notată $A = (a_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$.
- Transpusa matricei A este matricea $A^T = (a_{ji})_{n \times m} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$.
- Urma unei matrice pătratice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este suma elementelor de pe diagonala principală: $\text{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

2. Egalitatea matricelor

- Două matrice sunt egale dacă au același număr de linii și de coloane, iar elementele corespunzătoare sunt egale.

$$A = B \Leftrightarrow A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \text{ și } a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$$

3. Operații cu matrice

- Adunarea matricelor

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$$

- $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), +)$ este grup abelian, deoarece adunarea este bine definită, asociativă, comutativă, admite element neutru și element opus pentru fiecare matrice.

- Înmulțirea unei matrice cu un scalar

$$\text{Pentru } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}) \text{ și } \lambda \in \mathbb{C}, \text{ avem } \lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{m \times n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}).$$

- Înmulțirea matricelor

$$\text{Pentru } A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}), \text{ avem } AB = \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right)_{m \times p} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{C}).$$

- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \cdot)$ este monoid, deoarece înmulțirea este bine definită, asociativă și are element neutru I_n (unde I_n este matricea unitate de ordin n).

Blaga Mirela-Gabriela

- Ridicarea la putere

Pentru $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, unde $n, k \in \mathbb{N}^*$: $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ factori}}$ și $A^0 = I_n$.

Exerciții

1. Determinați numerele reale a, b, c, d pentru care matricele A și B sunt egale, unde:

$$A = \begin{pmatrix} a & b-2 \\ c+1 & 1-d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați:

a) $A + B$,

b) $3 \cdot A$,

c) $A \cdot B$,

d) $B \cdot B^T$,

e) B^2 .

3. Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, calculați urma matricei.

4. Precizați dacă $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +)$ și $(\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \cdot)$ sunt grupuri, în caz contrar, precizați structura algebrică obținută.

Conexiune interdisciplinară

În informatică, matricele apar în grafică, în reprezentarea grafurilor și în machine learning, unde calculele se bazează pe operații cu matrice.