

## Fișă de sinteză – Ecuatii și inecuații iraționale

---

### Competențe urmărite

- Identificarea tipurilor de ecuații și inecuații cu radicali.
  - Stabilirea corectă a condițiilor de existență.
  - Aplicarea ridicării la putere în rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor iraționale.
- 

### Teorie

#### 1. Ecuatia irațională $\sqrt{f(x)} = g(x)$

- Condiții de existență:  $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ .
- Ridicarea la puterea a doua:  $f(x) = g^2(x)$ .
- Verificarea soluțiilor: în ecuația inițială și în condițiile de existență.
- Exemplu:

$$\sqrt{x+5} = x-1, \text{ condiții: } x+5 \geq 0, x-1 \geq 0, \text{ deci } x \geq 1 \Rightarrow x+5 = x^2 - 2x + 1 \\ \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ care nu convine și } x = 4 \text{ care convine}$$

#### 2. Ecuatia irațională $\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x)$

- Condiții de existență:  $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0, h(x) \geq 0$ .
- Ridicarea la puterea a doua:  $(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^2 = h^2(x)$ .
- Verificarea soluțiilor: în ecuația inițială și în condițiile de existență.
- Exemplu:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3, \text{ condiții: } x+1 \geq 0, x-2 \geq 0 \text{ deci } x \geq 2 \Rightarrow \\ (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2})^2 = 9 \Rightarrow x+1 + 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} + x-2 = 9 \Rightarrow \\ 2\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} = 10 - 2x \Rightarrow \sqrt{(x+1)(x-2)} = 5-x, x \leq 5 \Rightarrow \\ (x+1)(x-2) = (5-x)^2 \Rightarrow 9x = 27 \Rightarrow x = 3 \in [2, 5] \text{ care convine}$$

#### 3. Ecuatia irațională $\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$

- Condiții de existență: dacă este cazul.
- Ridicarea la puterea a treia:  $f(x) = g^3(x)$ .
- Verificarea soluțiilor: în ecuația inițială și în condițiile de existență.
- Exemplu:

$$\sqrt[3]{5x-2} = 2, \text{ cu } x \in \mathbb{R} \Rightarrow 5x-2 = 8 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2 \in \mathbb{R}$$

Blaga Mirela-Gabriela

#### 4. Inecuația irațională $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$

- Condiții de existență:  $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ .
- Ridicarea la puterea a doua:  $f(x) \leq g^2(x)$ .
- Exemplu:

$$\sqrt{x+2} \leq x, \text{ condiții: } x+2 \geq 0, x \geq 0, \text{ deci } x \geq 0 \Rightarrow x \in [0, +\infty) \quad (1)$$

$$x+2 \leq x^2 \Rightarrow x^2 - x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) \quad (2)$$

Din intersecția (1) și (2), soluția inecuației este  $x \in [2, +\infty)$ .

#### 5. Inecuația irațională $\sqrt{f(x)} > g(x)$

- Condiții de existență:  $f(x) \geq 0$  și, dacă este cazul, condiții pentru  $g$ .
- Transformarea în sistem și reuniunea soluțiilor:

$$\text{ramura 1: } g(x) \leq 0 \text{ și } f(x) \geq 0$$

$$\text{ramura 2: } g(x) > 0, f(x) \geq 0 \text{ și } f(x) > g^2(x)$$

- Exemplu:

$$\sqrt{x+2} > x$$

$$\text{ramura 1. } x \leq 0 \text{ și } x+2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-2, 0]$$

$$\text{ramura 2. } x > 0, x+2 \geq 0 \text{ și } x+2 > x^2 \Rightarrow x \in (0, 2)$$

Prin reuniune,  $x \in [-2, 0] \cup (0, 2)$ , soluția inecuației este  $x \in [-2, 2)$ .

---

### Exerciții

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

a)  $\sqrt{x+5} = 3$ ,

b)  $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} = 5$ ,

c)  $\sqrt[3]{x} = x$ .

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuațiile:

a)  $\sqrt{3x-2} < x$ ,

b)  $\sqrt{5-4x} \geq x$ .

---

### Conexiune interdisciplinară

Ecuțiile și inecuațiile iraționale apar în fizică la modelarea relațiilor dintre mărimi, atunci când expresiile implică distanțe, viteze sau energii.