Blaga Mirela-Gabriela

Fișă de sinteză – Metoda inducției matematice

Competențe urmărite

- Aplicarea raționamentului inductiv pentru demonstrarea formulelor.
- Verificarea valabilității unei propoziții cu ajutorul inducției matematice.

Teorie

1. Metoda inducției matematice

- Metoda inducției matematice este o tehnică folosită pentru a demonstra că o afirmație este adevărată pentru toate numerele naturale $n \geq n_0$, unde n_0 este un număr natural fixat.

2. Etapele metodei inducției matematice

- Verificăm dacă propoziția este adevărată pentru n_0.
- Presupunem că propoziția este adevărată pentru $n = k \geq n_0$.
- Arătăm că propoziția este adevărată pentru $n = k + 1$ folosind ipoteza de inducție.

3. Exemplu

Demonstrați prin inducție propoziția: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}^*$.

I. Pentru $n = 1$ avem $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ (A).

II. $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

III. $1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

$$\frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \ (A)$$

Exerciții

1. Demonstrați că, pentru $\forall n \in \mathbb{N}^*$, avem $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Demonstrați că $2^n > n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. Arătați că $7^n - 1$ este divizil cu 6 pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Demonstrați prin inducție: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ \dots \ + n \cdot n! = (n+1)! - 1, n \in \mathbb{N}^*$.

Conexiune interdisciplinară

În informatică, inducția matematică este folosită pentru a demonstra corectitudinea algoritmilor recursivi.