

Vectori în spațiu

11. Proiecția unui punct pe o dreaptă

Proiecția unui punct pe o dreaptă reprezintă piciorul perpendicularei dusă din acel punct pe dreaptă.

Fie punctele $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ și $C(x_3, y_3, z_3)$.

Proiecția punctului A pe dreapta BC este punctul $P(x, y, z)$ de coordonate:

$$\begin{cases} x = x_2 + t(x_3 - x_2) \\ y = y_2 + t(y_3 - y_2) \\ z = z_2 + t(z_3 - z_2) \end{cases}, \text{ unde } t = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2} \in \mathbb{R}.$$

Exemplu

1. Fie punctele $A(0, 0, 3)$, $B(1, 0, 0)$ și $C(0, 2, 0)$. Aflați proiecția punctului A pe dreapta BC .

Proiecția punctului A pe dreapta BC este punctul $P(x, y, z)$ de coordonate:

$$\begin{cases} x = 1 + t(0 - 1) \\ y = 0 + t(2 - 0) \\ z = 0 + t(0 - 0) \end{cases}, \text{ unde } t = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2} \in \mathbb{R}.$$

Aflăm vectorii \overrightarrow{BA} și \overrightarrow{BC} : $\overrightarrow{BA}(-1, 0, 3)$, $\overrightarrow{BC}(-1, 2, 0)$. Calculăm $|\overrightarrow{BC}|^2 = \sqrt{1 + 4 + 0^2} = 5$.

Obținem $t = \frac{1 + 0 + 0}{5} = \frac{1}{5} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{1}{5} \\ y = 0 + \frac{2}{5} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{5} \\ y = \frac{2}{5} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, 0\right)$$

12. Distanța dintre două drepte necoplanare

Două drepte sunt necoplanare dacă nu sunt paralele și nu se intersectează.

Distanța dintre două drepte necoplanare este lungimea celui mai scurt segment care leagă cele două drepte și este perpendicular pe ambele.

Fie punctele $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$.

Pentru a calcula distanța d dintre dreptele necoplanare AB și CD în spațiu, procedăm astfel:

$$d = \frac{|\Delta|}{\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{CD}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD})^2}}, \text{ unde } \Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_4 - x_3 & y_4 - y_3 & z_4 - z_3 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Exemplu

2. Fie punctele $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 1, 3)$, $D(0, 0, 2)$.

Aflați distanța dintre dreptele necoplanare AB și CD .

$$\overrightarrow{AB}(-1, 1, 0), \overrightarrow{CD}(0, -1, -1), \overrightarrow{AC}(-1, 1, 3)$$

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = 1 + 1 = 2, |\overrightarrow{CD}|^2 = 1 + 1 = 2$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 - 1 + 0 = -1$$

$$\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 \cdot |\overrightarrow{CD}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD})^2} = \sqrt{2 \cdot 2 - (-1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3, \text{ unde } \Delta \text{ este format din vectorii } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \text{ și } \overrightarrow{AC}$$

Distanța dintre dreptele necoplanare AB și CD este $d = \frac{|3|}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Exercițiu

Fie punctele $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(2, 1, 4)$ și $D(4, 2, 1)$.

a) Aflați proiecția punctului A pe dreapta BC .

b) Calculați distanța dintre dreptele necoplanare AB și CD .

Bibliografie

https://ro.wikipedia.org/wiki/Spațiu_vectorial