Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Vectori în spațiu

7. Vectori paraleli sau coliniari

Fie vectorii $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ și $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$.

$\vec{u} \parallel \vec{v}$ sau $\vec{u}, \vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$

Exemplu

1. Determinați numărul real m, știind că vectorii $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + m\vec{k}$ și $\vec{v} = -5\vec{i} + 10\vec{j} + 5\vec{k}$ sunt paraleli.

Coordonatele vectorilor sunt $\vec{u}(1, -2, m)$ și $\vec{v}(-5, 10, 5)$.

$\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \dfrac{1}{-5} = \dfrac{-2}{10} = \dfrac{m}{5} \Rightarrow m = -1 \in \mathbb{R}$

8. Ecuația unei drepte în spațiu

Fie punctele $P_1(x_1, y_1, z_1)$ și $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

Vectorul director al dreptei P_1P_2 este $\overrightarrow{P_1P_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

a) Ecuația vectorială a dreptei P_1P_2 este $\overrightarrow{P_1M} = t \cdot \overrightarrow{P_1P_2}, t \in \mathbb{R}, \forall M(x, y, z) \in P_1P_2$.

b) Ecuația parametrică a dreptei P_1P_2 este $\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), t \in \mathbb{R}. \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1) \end{cases}$

c) Ecuația simetrică a dreptei P_1P_2 este $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Observație. Ecuația simetrică poate fi scrisă doar dacă toți numitorii sunt nenuli.

Exemplu

2. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctele $A(1, 2, 3)$ și $B(3, 0, -1)$.

Ecuația parametrică a dreptei AB este $\begin{cases} x = 1 + t(3 - 1) \\ y = 2 + t(0 - 2) \\ z = 3 + t(-1 - 3) \end{cases} \Rightarrow AB: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 4t \end{cases}$

Ecuația simetrică a dreptei determinată de cele două puncte este $AB: \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 2}{-2} = \dfrac{z - 3}{-4}$.

Alternativ, dacă se cunoaște punctul $P_1(x_1, y_1, z_1) \in Oxyz$ și vectorul director $\vec{v}(a, b, c)$, dreapta care trece prin P_1 și are direcția dată de $\vec{v}$ are formele:

a) Ecuația vectorială: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP_1} + t \cdot \vec{v}, t \in \mathbb{R}$

b) Ecuația parametrică: $\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

c) Ecuația simetrică: $\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c}$, dacă $a, b, c \neq 0$

Exemplu

3. Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul $P(0, 1, -2)$ și are vectorul director $\vec{v}(-2, 4, 1)$.

$d: \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z+2}{1}$ sau

$d: \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + 4t \\ z = -2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Exerciții

1) Arătați că vectorii $\vec{u} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ și $\vec{v} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ sunt coliniari

2) Determinați ecuația simetrică a dreptei care trece prin punctele $M(0, 1, 2)$ și $N(2, -1, 5)$. Verificați dacă punctul $P(5, -5, -7)$ aparține dreptei MN.

Bibliografie

https://ro.wikipedia.org/wiki/Spațiu_vectorial