Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Problemă vectorială de coliniaritate

Fie triunghiul ABC având laturile $a = 4, b = 5, c = 6$. Pe laturile acestui triunghi se consideră punctele D, E, F astfel încât $\frac{BD}{DC} = k$, $\frac{CE}{EA} = m$, $\frac{AF}{FB} = n$, unde $k, m, n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. Determinați valoarea lui n pentru care punctele I, G și G_{DEF} sunt coliniare, unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC, G este centrul de greutate al triunghiului ABC, iar G_{DEF} este centrul de greutate al triunghiului DEF.

Rezolvare

Calculăm vectorii de poziții I, G, G_{DEF} pentru a verifica condiția de coliniaritate.

$$\overrightarrow{r_I} = \frac{4\overrightarrow{r_A} + 5\overrightarrow{r_B} + 6\overrightarrow{r_C}}{15}$$

$$\overrightarrow{r_G} = \frac{\overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C}}{3}$$

$$\overrightarrow{r_G}_{DEF} = \frac{\overrightarrow{r_D} + \overrightarrow{r_E} + \overrightarrow{r_F}}{3} \text{ , unde } \overrightarrow{r_D} = \frac{\overrightarrow{r_B} + k\overrightarrow{r_C}}{k+1} \text{ , } \overrightarrow{r_E} = \frac{\overrightarrow{r_C} + m\overrightarrow{r_A}}{m+1} \text{ , } \overrightarrow{r_D} = \frac{\overrightarrow{r_A} + n\overrightarrow{r_B}}{n+1}$$

$$\overrightarrow{r_G}_{DEF} = \frac{\left(\frac{1}{n+1} + \frac{m}{m+1}\right)\overrightarrow{r_A} + \left(\frac{1}{k+1} + \frac{n}{n+1}\right)\overrightarrow{r_B} + \left(\frac{1}{m+1} + \frac{k}{k+1}\right)\overrightarrow{r_C}}{3}$$

Punctele I, G, G_{DEF} sunt coliniare dacă $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ a. î. $\overrightarrow{IG} = \alpha\overrightarrow{GG}_{DEF}$.

$$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{r_G} - \overrightarrow{r_I} = \frac{\overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_C}}{15}$$

Coeficientul lui $\overrightarrow{r_B}$ este zero, deci egalăm cu zero coeficientul lui $\overrightarrow{r_B}$ din vectorul $\overrightarrow{GG}_{DEF}$.

$$\frac{1}{k+1} + \frac{n}{n+1} - 1 = 0 \ \rightarrow n = k$$

Pentru $n = k$ și $\forall m \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ punctele I, G și G_{DEF} sunt coliniare.