

Rezolvarea ecuațiilor trigonometrice

Ecuațiile trigonometrice sunt ecuații care implică funcții trigonometrice ale unei variabile unghi, cum ar fi sinus, cosinus, tangentă și cotangentă. Scopul rezolvării acestor ecuații este găsirea valorilor unghiului pentru care ecuația devine adevărată.

Rezolvarea ecuațiilor de tipul $\operatorname{tg} x = a$

Mulțimea soluțiilor ecuației $\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$ este $S = \{ \operatorname{arctg} a + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

1) $\operatorname{tg} x = 1$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Funcția tangentă are perioada π , ceea ce înseamnă că valorile sale se repetă la intervale de lungime π . Soluția principală este unghiul din intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\operatorname{tg} x = 1$. Știm că $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$, așadar soluția principală este $x = \frac{\pi}{4}$. Din cauza periodicității funcției tangentă, soluțiile se repetă la fiecare interval de lungime π și sunt de forma $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, unde $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\operatorname{tg} x = 5$

$$\operatorname{tg} x = 5 \in \mathbb{R} \rightarrow x \in \{ \operatorname{arctg} 5 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

3) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$

$$2x = x + k\pi, k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \rightarrow$$

$$x \in \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \cap \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\} \cap \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow x \in \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

Probleme propuse

4) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5) $\operatorname{tg} x = -1$

6) $\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} x$