

Numărul funcțiilor injective, surjective, bijective

Fie funcția $f: M \rightarrow N$, unde numărul elementelor mulțimilor M și N este finit. Domeniul M reprezintă mulțimea elementelor pentru care definim funcția, iar codomeniul N reprezintă valorile pe care funcția le poate lua. Notăm cu $|M|$ și $|N|$ cardinalele celor două mulțimi, astfel $|M| = m \in \mathbb{N}^*$, $|N| = n \in \mathbb{N}^*$.

1) Numărul funcțiilor $f: M \rightarrow N$ este $|N|^{|M|} = n^m$.

Exemplu. Aflați numărul funcțiilor $f: \{1,2,3,4,5\} \rightarrow \{1,2,3\}$.

Rezolvare. Domeniul are 5 elemente, iar codomeniul funcției are 3 elemente, atunci numărul funcțiilor este $3^5 = 243$.

2) Numărul funcțiilor injective $f: M \rightarrow N$, unde $m \leq n$, este $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Exemplu. Aflați numărul funcțiilor injective $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3,4\}$.

Rezolvare. Pentru că domeniul are 3 elemente, iar codomeniul funcției are 4 elemente, numărul funcțiilor injective este $A_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

3) Numărul funcțiilor surjective $f: M \rightarrow N$, unde $m \geq n$, este $n^m - C_n^1 \cdot (n-1)^m + C_n^2 \cdot (n-2)^m - C_n^3 \cdot (n-3)^m + \dots + (-1)^{n-1} \cdot C_n^{n-1}$.

Exemplu. Aflați numărul funcțiilor surjective $f: \{1,2,3,4,5\} \rightarrow \{1,2,3\}$.

Rezolvare. Fiindcă domeniul are 5 elemente, iar codomeniul funcției are 3 elemente, numărul funcțiilor surjective este $3^5 - C_3^1 \cdot 2^5 + C_3^2 \cdot 1^5 - C_3^3 \cdot 0^5 = 243 - 96 + 3 = 150$.

4) Numărul funcțiilor bijective $f: M \rightarrow N$, unde $m = n$, este $P_n = n!$.

Exemplu. Aflați numărul funcțiilor bijective $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{4,5,6\}$.

Rezolvare. Domeniul și codomeniul funcției au câte 3 elemente fiecare, atunci numărul funcțiilor bijective este $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

5) Numărul funcțiilor strict crescătoare $f: M \rightarrow N$, $m \leq n$, este $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Exemplu. Aflați numărul funcțiilor strict crescătoare $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3,4\}$.

Rezolvare. Pentru că domeniul are 3 elemente, iar codomeniul funcției are 4 elemente, numărul funcțiilor strict crescătoare este $C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!} = 4$.

6) Numărul funcțiilor crescătoare $f: M \rightarrow N$ este $C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$.

Exemplu. Aflați numărul funcțiilor crescătoare $f: \{1,2,3,4,5\} \rightarrow \{1,2,3\}$.

Rezolvare. Domeniul are 5 elemente, iar codomeniul funcției are 3 elemente, deci numărul funcțiilor crescătoare este $C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = \frac{7!}{5!2!} = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$.

Funcția $f: M \rightarrow N$ este crescătoare dacă $\forall x_1, x_2 \in M$ cu $x_1 < x_2$ avem $f(x_1) \leq f(x_2)$.

7) Numărul funcțiilor strict descrescătoare $f: M \rightarrow N$, unde $m \leq n$, este același ca pentru funcțiile strict crescătoare $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$.

Exemplu. Aflați numărul funcțiilor strict descrescătoare $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$.

Rezolvare. Pentru că domeniul are 3 elemente, iar codomeniul funcției are 5 elemente, numărul funcțiilor strict descrescătoare este $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{4 \cdot 5}{2!} = \frac{20}{2} = 10$.

8) Numărul funcțiilor strict monotone $f: M \rightarrow N$, unde $m \leq n$, este $2C_n^m$.

Exemplu. Aflați numărul funcțiilor strict monotone $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$.

Rezolvare. Domeniul are 3 elemente, iar codomeniul funcției are 5 elemente, deci numărul funcțiilor strict monotone este $2C_5^3 = 2 \cdot \frac{5!}{3!(5-3)!} = 2 \cdot \frac{4 \cdot 5}{2!} = 20$.

9) Numărul funcțiilor constante $f: M \rightarrow N$ este egal cu numărul elementelor din codomeniul N .

Exemplu. Aflați numărul funcțiilor constante $f: \{1,2,3,4,5\} \rightarrow \{1,2,3\}$.

Rezolvare. Numărul funcțiilor constante este 3, deoarece există 3 elemente în codomeniu.

Probleme propuse

1. Aflați numărul funcțiilor $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$.
2. Aflați numărul funcțiilor bijective $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$.
3. Aflați numărul funcțiilor injective $f: \{a, b, c, d\} \rightarrow \{a, b, c, d, e, f\}$.

Bibliografie

[Twelvefold way](#)