Compunerea funcțiilor

Probleme avansate și verificarea proprietăților

1 Fie funcțiile $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1, g(x) = x^2 - 2$ și $h(x) = 2^x$. Verificați egalitatea $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Rezolvare

Compunerile $(h \circ g) \circ f$ și $h \circ (g \circ f)$ sunt bine definite.

I. Determinăm $\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)\big(f(x)\big)$.

Aflăm $h \circ g$ astfel $(h \circ g)(x) = h\big(g(x)\big) = 2^{g(x)} = 2^{x^2-2}$.

$\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = 2^{f^2(x)-2} = 2^{(x+1)^2-2} = 2^{x^2+2x-1}$ (1)

II. Determinăm $\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h((g \circ f)(x))$

Aflăm $g \circ f$ astfel $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = f^2(x) - 2 = (x+1)^2 - 2 = x^2 + 2x - 1$.

$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h(x^2 + 2x - 1) = 2^{x^2+2x-1}$ (2)

Din relațiile (1) și (2) rezultă că $\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Observație. Acest exercițiu confirmă asociativitatea compunerii funcțiilor.

2 Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$ și $g(x) = x^2 - 2$. Aflați $f \circ g$ și $g \circ f$.

Rezolvare

$f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = g(x) = x^2 - 2$

$g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x) = x^2 - 2$

Observație. Din calculele efectuate rezultă că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x$, fiind funcția identică, păstrează rezultatul compunerii: $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

3 Știind că $(f \circ f)(x) = 9x + 4$, aflați funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a > 0, b \in \mathbb{R}$.

Rezolvare

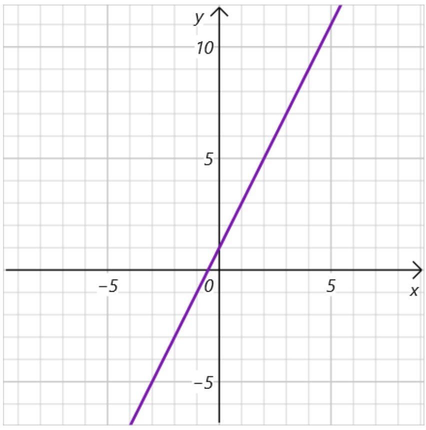
$f \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = a \cdot f(x) + b = a(ax + b) + b = a^2x + ab + b$

Deoarece $(f \circ f)(x) = 9x + 4$, avem $a^2x + ab + b = 9x + 4$, de unde $a^2 = 9, ab + b = 4$ obținem $a = 3 > 0$ și $b = 1 \in \mathbb{R}$, iar funcția este $f(x) = 3x + 1, f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

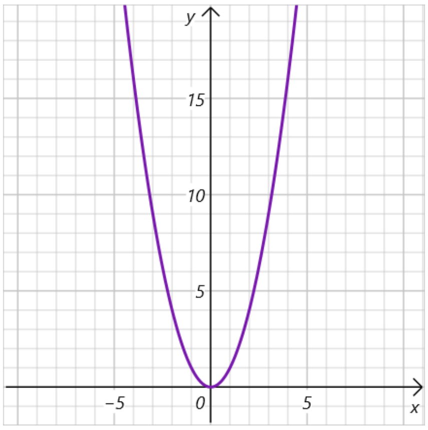
4 Reprezentați grafic funcțiile $f, g, f \circ g$ și $g \circ f$, știind că $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$ și $g(x) = x^2$.

Rezolvare

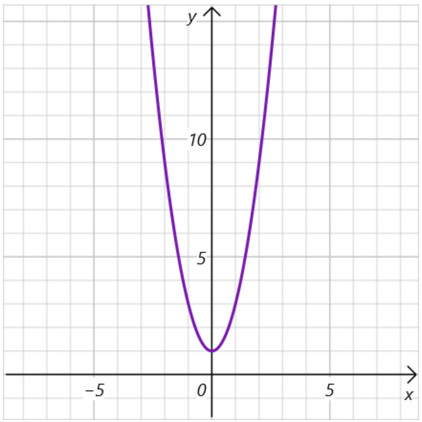
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 2x + 1$



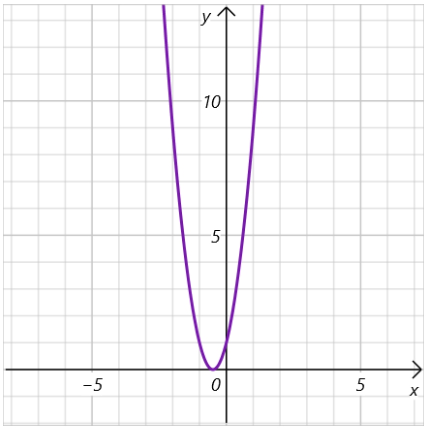
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g(x) = x^2$



$f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$



$g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x + 1$



Observație. În acest exercițiu, compunerea funcțiilor nu este comutativă, $f \circ g \neq g \circ f$.

5 Aflați $f \circ f$ și $f \circ f \circ f$, știind că $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x - 2$.

6 Aflați $f \circ g, f \circ f, g \circ g$ și $g \circ f$, știind că $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1, g(x) = x^2 - x$.

7 Știind că $(f \circ f)(x) = 4x + 3$, aflați funcțiile $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax - b, a, b \in \mathbb{R}$.

Bibliografie
Function composition
Composition of functions
Graphs created with Math OneNote for Windows 10