Clasificarea și numărarea funcțiilor între mulțimi finite

Fie funcția $f: M \to N$, unde numărul elementelor mulțimilor M și N este finit. Domeniul M reprezintă mulțimea elementelor pentru care definim funcția, iar codomeniul N reprezintă valorile pe care funcția le poate lua. Notăm cu $|M|$ și $|N|$ cardinalele celor două mulțimi, astfel $|M| = m \in \mathbb{N}^*, |N| = n \in \mathbb{N}^*$.

1) Numărul funcțiilor $f: M \to N$ este $|N|^{|M|} = n^m$, deoarece fiecare element al mulțimii M poate fi asociat cu oricare element al mulțimii N.

<u>Exemplu</u>

Numărul funcțiilor $f: \{1,2,3\} \to \{a, b\}$ este 2^3.

2) O funcție $f: M \to N$ este injectivă dacă fiecărui element din mulțimea N îi corespunde cel mult un element din mulțimea M, adică fiecare element din codomeniu este imaginea a cel mult un element din domeniu.

$$\text{Numărul funcțiilor injective } f: M \to N, \text{unde } m \leq n, \text{este } A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

<u>Exemplu</u>

Numărul funcțiilor injective $f: \{1,2\} \to \{a, b, c\}$ este $A_3^2 = \dfrac{3!}{(3-2)!} = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Un exemplu de funcție injectivă este $f: \{1,2\} \to \{a, b, c\}, f(1) = a, f(2) = b$.

3) O funcție $f: M \to N$ este surjectivă dacă fiecărui element din mulțimea N îi corespunde cel puțin un element din mulțimea M, adică fiecare element din codomeniu are cel puțin o preimagine.

Numărul funcțiilor surjective $f: M \to N$, unde $m \geq n$, este

$$n^m - C_n^1 \cdot (n-1)^m + C_n^2 \cdot (n-2)^m - C_n^3 \cdot (n-3)^m + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot C_n^{n-1}.$$

<u>Exemplu</u>

Numărul funcțiilor surjective $f: \{1,2,3\} \to \{a, b\}$ este $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$. Din numărul total de funcții, excludem funcțiile care nu sunt surjective: $f(1) = f(2) = f(3) = a$ și $f(1) = f(2) = f(3) = b$.

Un exemplu de funcție surjectivă este $f: \{1,2,3\} \to \{a, b\}, f(1) = a, f(2) = b, f(3) = b$.

4) O funcție $f: M \rightarrow N$ este bijectivă dacă fiecărui element din mulțimea N îi corespunde un unic element din mulțimea M.

Numărul funcțiilor bijective $f: M \rightarrow N$, unde $m = n$, este $P_n = n!$.

Exemplu

Numărul funcțiilor bijective $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{a, b, c\}$ este $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Un exemplu de funcție bijectivă este $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{a, b, c\}$, $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c$.

Aplicații practice

1) În criptografie, funcțiile bijective sunt folosite în algoritmii de criptare-decriptare. De exemplu, pentru un text format din litere, se definește o funcție bijectivă $f: \{A, B, C, \dots, Z\} \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, 26\}$, astfel încât fiecărei litere să îi corespundă un cod numeric unic, iar decriptarea să fie reversibilă. Câte funcții bijective se pot defini între mulțimea literelor alfabetului și mulțimea codurilor numerice asociate?

Răspuns: 26!

2) Câte moduri diferite există pentru a atribui 3 sarcini distincte la 5 angajați, astfel încât fiecare angajat să aibă o singură sarcină?

Răspuns: $A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

3) Fie 5 pasageri și 5 locuri numerotate distinct într-un autobuz. Câte aranjamente diferite sunt posibile?

Răspuns: $5! = 120$

4) Fie patru sarcini și trei echipe. În câte moduri, sarcinile pot fi atribuite echipelor, astfel încât fiecare echipă să primească cel puțin o sarcină?

Răspuns: Creăm funcția $f: \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \rightarrow \{e_1, e_2, e_3\}$. Numărul total de funcții este 3^4 și eliminăm funcțiile care nu sunt surjective, deoarece fiecare echipă trebuie să primească cel puțin o sarcină. Funcțiile care nu ating una dintre echipe sunt în număr de $C_3^1 \cdot 2^4$, iar funcțiile care nu ating două echipe sunt în număr de $C_3^2 \cdot 1^4$. Utilizând formula de incluziune-excluziune pentru a afla numărul funcțiilor surjective: $3^4 - C_3^1 \cdot 2^4 + C_3^2 \cdot 1^4 = 81 - 48 + 3 = 36$. Sunt 36 de moduri în care sarcinile pot fi atribuite echipelor, astfel încât fiecare echipă să primească cel puțin o sarcină.

Probleme suplimentare

1. Aflați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\} \to \{a,b,c,d\}$.

2. Aflați numărul funcțiilor injective $f:\{a,b,c,d\} \to \{1,2,3,4,5,6\}$.

3. Aflați numărul funcțiilor surjective $f:\{1,2,3,4\} \to \{a,b,c\}$.

4. Aflați numărul funcțiilor bijective $f:\{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$.

Bibliografie

Twelvefold way
Combinatorics and Graph Theory