

Rezolvarea ecuațiilor cu modul

Ecuatiile cu modul sunt ecuații în care variabila sau o expresie ce conține variabila se află sub semnul modulului.

Rezolvarea ecuațiilor de tipul $|ax + b| + |cx + d| = e$

Pentru a rezolva ecuația $|ax + b| + |cx + d| = e$, unde $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, folosim semnul funcțiilor de gradul întâi $ax + b$ și $cx + d$, ca să determinăm intervalele pe care aceste expresii își schimbă semnul. Aceste intervale ne permit să analizăm comportamentul fiecărui modul în funcție de semnul expresiilor liniare, astfel încât să transformăm ecuația într-o formă fără modul, mai ușor de rezolvat.

Exemple de rezolvare

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

$$1) |2x + 1| + |x - 3| = 5$$

Pasul 1. Determinăm punctele critice:

$$2x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Pasul 2. Realizăm tabelul de semn pentru funcțiile $2x + 1$ și $x - 3$:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$	
$2x + 1$	-	-	-	0	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	-	-	0	+	+

Pasul 3. Scriem ecuațiile fără modul pe fiecare interval și le rezolvăm:

$$\text{Cazul I: } x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$$

$$-(2x + 1) - (x - 3) = 5$$

$$-3x = 3$$

$$x = -1 \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$$

Cazul II: $x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right]$

$$2x + 1 - (x - 3) = 5$$

$$x = 1 \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right]$$

Cazul III: $x \in (3, +\infty)$

$$2x + 1 + x - 3 = 5$$

$$3x = 7$$

$$x = \frac{7}{3} \notin (3, +\infty)$$

Soluțiile ecuației $|2x + 1| + |x - 3| = 5$ sunt $x = -1$ și $x = 1$.

$$2) |4 - x| - |x + 4| = 4$$

Pasul 1. Determinăm punctele critice:

$$4 - x = 0 \rightarrow x = 4$$

$$x + 4 = 0 \rightarrow x = -4$$

Pasul 2. Realizăm tabelul de semn pentru funcțiile $4 - x$ și $x + 4$:

x	$-\infty$		-4		4		$+\infty$	
$4 - x$	+	+	+	+	0	-	-	-
$x + 4$	-	-	-	0	+	+	+	+

Pasul 3. Scriem ecuațiile fără modul pe fiecare interval și le rezolvăm:

Cazul I: $x \in (-\infty, -4]$

$$4 - x - (-(x + 4)) = 4$$

$$4 - x + x + 4 = 4 \rightarrow 8 = 4, \text{ fals}$$

Cazul II: $x \in (-4, 4]$

$$4 - x - (x + 4) = 4$$

$$-2x = 4 \rightarrow x = -2 \in (-4, 4]$$

Cazul III: $x \in (4, +\infty)$

$$-(4 - x) - (x + 4) = 4 \rightarrow -8 = 4, \text{ fals}$$

Soluția ecuației $|4 - x| - |x + 4| = 4$ este $x = -2$.

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Probleme propuse

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

1) $|4 - x| + |x + 4| = 8$

2) $|3x + 2| - |x + 2| = 4$