Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Rezolvarea ecuațiilor logaritmice

O ecuație logaritmică este o ecuație în care necunoscuta apare în baza sau în argumentul logaritmului. Rezolvarea acestei ecuații implică determinarea tuturor soluțiilor posibile. Forma generală a unei ecuații logaritmice este $\log_a x = b$, unde $a > 0, a \neq 1, x > 0$ și $b \in \mathbb{R}$. În această formă, a se numește bază, iar x argument.

Rezolvarea ecuațiilor logaritmice de tipul $\log_a x + \log_x a = b$

Ecuațiile logaritmice de tipul $\log_a x + \log_x a = b$, unde $a, x > 0$ și $a, x \neq 1$, se rezolvă astfel:

(1) Notăm $t = \log_a x$, unde $t \in \mathbb{R}$, iar $\log_x a = \dfrac{1}{\log_a x} = \dfrac{1}{t}$.

Ecuația logaritmică se reduce la o ecuație de gradul al doilea în t:

$$t + \frac{1}{t} = b \rightarrow t^2 - b \cdot t + 1 = 0$$

(2) Rezolvăm ecuația de gradul al doilea:

$$t_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2}, b^2 - 4 \geq 0$$

(3) Revenim la notație și rezolvăm ecuațiile:

$\log_a x = t_1 \rightarrow x = a^{t_1}$ și $\log_a x = t_2 \rightarrow x = a^{t_2}$.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\log_5 x + \log_x 5 = 2$$

Logaritmii au sens pentru $x > 0$ și $x \neq 1$.

Notăm $t = \log_5 x$, iar $\log_x 5 = \dfrac{1}{t}$.

Ecuația logaritmică se reduce la ecuația $t + \dfrac{1}{t} = 2$, de unde obținem $t^2 - 2t + 1 = 0$.

Rezolvăm ecuația de gradul al doilea:

$(t-1)^2 = 0 \rightarrow t - 1 = 0 \rightarrow t = 1 \in \mathbb{R}$

Revenim la notație și rezolvăm ecuația logaritmică:

$\log_5 x = 1 \rightarrow x = 5, x > 0, x \neq 1$

Soluția ecuației $\log_5 x + \log_x 5 = 2$ este $x = 5$.

Probleme propuse

$a)\ 3 \cdot \log_2 x - \log_x 2 = 2$

$b)\ \log_3 x + 2 + \log_x 3 = 0$