

Rezolvarea ecuațiilor logaritmice

O ecuație logaritmică este o ecuație în care necunoscuta apare în baza sau în argumentul logaritmului. Rezolvarea acestei ecuații implică determinarea tuturor soluțiilor posibile. Forma generală a unei ecuații logaritmice este $\log_a x = b$, unde $a > 0, a \neq 1, x > 0$ și $b \in \mathbb{R}$. În această formă, a se numește bază, iar x argument.

Rezolvarea ecuațiilor logaritmice de tipul $\log_a f(x) + \log_{a^2} f(x) = b$

Ecuațiile logaritmice de tipul $\log_a f(x) + \log_{a^2} f(x) = b$, unde $a > 0, a \neq 1$ și $f(x) > 0$, pot fi transformate folosind proprietatea logaritmilor:

$$\log_{a^n} x = \frac{1}{n} \log_a x, \text{ unde } a, x > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{R}^*.$$

Ecuația devine:

$$\log_a f(x) + \frac{1}{2} \log_a f(x) = b$$

$$\frac{3}{2} \log_a f(x) = b$$

$$\log_a f(x) = \frac{2b}{3}$$

$$\text{Prin urmare } f(x) = a^{\frac{2b}{3}}.$$

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

$$a) \log_2 x + \log_4 x = 6$$

Impunem condiția $x > 0$ și rezolvăm ecuația:

$$\log_2 x + \log_4 x = 6 \rightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x = 6 \rightarrow \left(1 + \frac{1}{2}\right) \log_2 x = 6 \rightarrow \frac{3}{2} \log_2 x = 6 \rightarrow$$

$$\log_2 x = 6 \cdot \frac{2}{3} \rightarrow \log_2 x = 4 \rightarrow x = 2^4 \rightarrow x = 16, x > 0$$

Soluția ecuației $\log_2 x + \log_4 x = 6$ este $x = 16$.

$$b) \log_x 2 - \log_{x^2} 2 = 1$$

Ecuația logaritmică are sens pentru $x > 0$ și $x \neq 1$.

Rezolvăm ecuația:

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

$$\log_x 2 - \log_{x^2} 2 = 1 \rightarrow \log_x 2 - \frac{1}{2} \log_x 2 = 1 \rightarrow \left(1 - \frac{1}{2}\right) \log_x 2 = 1 \rightarrow \frac{1}{2} \log_x 2 = 1 \rightarrow$$

$$\log_x 2 = 2 \rightarrow 2 = x^2$$

Ecuția $x^2 = 2$ admite soluțiile $x = \sqrt{2}$ și $x = -\sqrt{2}$, însă ținând cont de condiții, singura soluție acceptabilă pentru ecuația logaritmică $\log_x 2 - \log_{x^2} 2 = 1$ este $x = \sqrt{2}$.

Probleme propuse

c) $\log_3 x - \log_9 x + \log_{27} x = 5$

d) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x = \frac{25}{12}$