

Rezolvarea ecuațiilor logaritmice

O ecuație logaritmică este o ecuație în care necunoscuta apare în baza sau în argumentul logaritmului. Rezolvarea acestei ecuații implică determinarea tuturor soluțiilor posibile. Forma generală a unei ecuații logaritmice este $\log_a x = b$, unde $a > 0, a \neq 1, x > 0$ și $b \in \mathbb{R}$. În această formă, a se numește bază, iar x argument.

Rezolvarea ecuațiilor logaritmice de tipul $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Ecuațiile logaritmice de tipul $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, unde $a > 0, a \neq 1$ și $f(x), g(x) > 0$, sunt echivalente cu ecuația $f(x) = g(x)$. Datorită bijectivității funcției logaritmice, rezultă că logaritmi egali au argumente egale.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

$$a) \log_2(2x - 1) = \log_2 x$$

Condițiile de existență a logaritmilor sunt $2x - 1 > 0$ și $x > 0$.

Ecuația are sens pentru $x > \frac{1}{2}$.

Rezolvăm ecuația:

$$\log_2(2x - 1) = \log_2 x \rightarrow 2x - 1 = x \rightarrow 2x - x = 1 \rightarrow x = 1, x > \frac{1}{2}$$

Soluția ecuației $\log_2(2x - 1) = \log_2 x$ este $x = 1$.

$$b) \log_3(5x - 2) = \log_3(x + 2)$$

Rezolvăm ecuația:

$$\log_3(5x - 2) = \log_3(x + 2) \rightarrow 5x - 2 = x + 2 \rightarrow 5x - x = 2 + 2 \rightarrow 4x = 4 \rightarrow x = 1$$

Verificăm soluția: $\log_3(5 \cdot 1 - 2) = \log_3(1 + 2) \rightarrow \log_3 3 = \log_3 3$ (Adevărat)

Soluția ecuației $\log_3(5x - 2) = \log_3(x + 2)$ este $x = 1$.

$$c) \lg x = 1$$

Rescriem ecuația dată: $\lg x = \lg 10$

$$x = 10, x > 0$$

Soluția ecuației $\lg x = 1$ este $x = 10$.

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

$$d) 2 \cdot \log_5(x + 1) = \log_5 4x$$

Impunem condițiile: $x + 1 > 0$ și $4x > 0$. Obținem $x > 0$.

Rescriem ecuația dată utilizând proprietatea $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$, $a, b > 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathbb{R}$:

$$2 \cdot \log_5(x + 1) = \log_5 4x$$

$$\log_5(x + 1)^2 = \log_5 4x$$

$$(x + 1)^2 = 4x$$

$$x^2 + 2x + 1 - 4x = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x - 1)^2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1 > 0$$

Soluția ecuației $2 \cdot \log_5(x + 1) = \log_5 4x$ este $x = 1$.

Probleme propuse

$$e) \lg(x + 5) = \lg(x + 5)^2$$

$$f) 2 \cdot \log_2 x = \log_2(x + 2)$$

$$g) \log_3(4x - 1) = \log_3(11 - 2x)$$