Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Rezolvarea ecuaţiilor iraţionale

O ecuație irațională este o ecuație în care necunoscuta apare sub simbolul radical.

Ecuații iraționale rezolvate prin substituții

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

$$a)\ \sqrt{x} + \sqrt[3]{x-3} = 3$$

Pentru a rezolva ecuația urmăm pașii:

1. Notăm radicalii.

$\sqrt{x} = a \geq 0$

$\sqrt[3]{x-3} = b \in \mathbb{R}$

Ecuația devine $a + b = 3$.

2. Ridicăm la puterea egală cu ordinul radicalului pentru a elimina radicalii.

$\sqrt{x} = a \ \rightarrow \ x = a^2$

$\sqrt[3]{x-3} = b \ \rightarrow \ x - 3 = b^3 \ \rightarrow \ x = b^3 + 3$

$a^2 = b^3 + 3$

3. Rezolvăm sistemul utilizând metoda substituției.

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a^2 = b^3 + 3 \end{cases}$$

Substituim $a = 3 - b$ în a doua ecuație și aflăm b.

$(3-b)^2 = b^3 + 3$

$9 - 6b + b^2 = b^3 + 3$

$b^3 - b^2 + 6b - 6 = 0$

$b^2(b-1) + 6(b-1) = 0$

$(b-1)(b^2+6) = 0$

Obținem $b = 1 \in \mathbb{R}$.

4. Aflăm x din ecuația $x = b^3 + 3$.

$x = 1 + 3$

$x = 4$

4. Verificăm soluția $x = 4$ în ecuația inițială.

$\sqrt{4} + \sqrt[3]{4-3} = 3 \ \rightarrow \ \sqrt{4} + \sqrt[3]{1} = 3 \ \rightarrow \ 2 + 1 = 3$ (Adevărat)

$$b)\ \sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{1-x}=2$$

Rezolvare:

1. Notăm radicalii.

$\sqrt[3]{x+1}=a\in\mathbb{R}$

$\sqrt[3]{1-x}=b\in\mathbb{R}$

Ecuația devine $a+b=2$.

2. Ridicăm la puterea a treia pentru a elimina radicalii.

$\sqrt[3]{x+1}=a\ \rightarrow\ x+1=a^3\ \rightarrow\ x=a^3-1$

$\sqrt[3]{1-x}=b\ \rightarrow\ 1-x=b^3\ \rightarrow\ x=1-b^3$

$a^3-1=1-b^3\ \rightarrow\ a^3+b^3=2$

3. Rezolvăm sistemul utilizând metoda substituției.

$\begin{cases} a+b=2 \\ a^3+b^3=2 \end{cases}$

Substituim $b=2-a$ în a doua ecuație și aflăm a.

$a^3+(2-a)^3=2$

Pentru $(2-a)^3$ utilizăm identitatea $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.

$a^3+8-12a+6a^2-a^3=2$

$6a^2-12a+6=0$

$a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0$

$a-1=0$

Obținem $a=1\in\mathbb{R}$.

4. Aflăm x din ecuația $x=a^3-1$.

$x=1-1$

$x=0$

5. Verificăm soluția $x=0$ în ecuația inițială.

$\sqrt[3]{0+1}+\sqrt[3]{1-0}=2\ \rightarrow\ \sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{1}=2\ \rightarrow\ 1+1=2$ (Adevărat)

Problemă propusă

$$c)\ \sqrt[3]{x+3}-\sqrt[3]{x-4}=1$$