Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Rezolvarea ecuațiilor exponențiale

O ecuație exponențială este o ecuație în care necunoscuta apare în exponent. Forma generală a unei ecuații exponențiale este $a^x = b$, unde $a > 0, a \neq 1$ și $b > 0$. În această formă, a se numește bază, iar b argument.

Rezolvarea ecuațiilor de tipul $\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot a^{f(x)} + \gamma = 0$

Ecuațiile exponențiale de tipul $\alpha \cdot a^{2f(x)} + \beta \cdot a^{f(x)} + \gamma = 0$, unde $a > 0, a \neq 1, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, sunt ecuații în care termenii au aceeași bază exponențială și exponenți care sunt multipli ai unei funcții comune. Aceasta înseamnă că termenii exponențiali pot fi exprimați ca $a^{2f(x)}$ și $a^{f(x)}$. O metodă generală de rezolvare este următoarea:

(1) Notăm $t = a^{f(x)}$, unde $t > 0$. Ecuația exponențială se reduce la o ecuație de gradul al doilea în t:

$\alpha \cdot t^2 + \beta \cdot t + \gamma = 0$

(2) Rezolvăm ecuația de gradul al doilea:

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

(3) Dacă soluțiile $t_{1,2}$ sunt pozitive, revenim la notație și rezolvăm ecuațiile $a^{f(x)} = t_1$ și $a^{f(x)} = t_2$. În cazul în care doar una dintre soluții este pozitivă, doar aceasta va fi utilizată.

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

$a)\ 4^x - 2^x - 2 = 0$

Deoarece 4 este o putere a bazei 2, avem:

$2^{2x} - 2^x - 2 = 0$

Notăm $t = 2^x > 0$ și ecuația devine: $t^2 - t - 2 = 0$

Rezolvăm ecuația de gradul al doilea:

$t^2 - 2t + t - 2 = 0$

$(t - 2)(t + 1) = 0$

$t - 2 = 0 \ \rightarrow \ t = 2 > 0$ care convine și $t + 1 = 0 \ \rightarrow \ t = -1 < 0$ care nu convine.

Revenim la notație și rezolvăm ecuația exponențială:

$2^x = 2 \ \rightarrow \ x = 1 \in \mathbb{R}$

$$b)\ 4^x - 2 \cdot 2^x + 1 = 0$$

$2^{2x} - 2 \cdot 2^x + 1 = 0$

Notăm $t = 2^x > 0$ și ecuația devine:

$t^2 - 2t + 1 = 0$

Rezolvăm ecuația de gradul al doilea:

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$t = 1 > 0$

Revenim la notație și rezolvăm ecuația exponențială:

$2^x = 1 \ \rightarrow \ x = 0 \in \mathbb{R}$

$$c)\ 3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$$

Deoarece 9 este o putere a bazei 3, avem:

$3 \cdot 3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$

Notăm $t = 3^x > 0$ și ecuația devine:

$3t^2 - 10t + 3 = 0$

Rezolvăm ecuația de gradul al doilea:

$3t^2 - 9t - t + 3 = 0$

$3t(t - 3) - (t - 3) = 0$

$(t - 3)(3t - 1) = 0$

$t - 3 = 0 \ \rightarrow \ t = 3 > 0$ și $3t - 1 = 0 \ \rightarrow \ t = \frac{1}{3} > 0$

Revenim la notație și rezolvăm ecuațiile exponențiale:

$3^x = 3 \ \rightarrow \ x = 1 \in \mathbb{R}$

$3^x = \frac{1}{3} \ \rightarrow \ x = -1 \in \mathbb{R}$

Ecuația $3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3 = 0$ admite soluțiile reale -1 și 1.

Probleme propuse

$$d)\ 9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$$

$$e)\ 2 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$f)\ 25^x - 10 \cdot 5^x + 25 = 0$$