

Rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea

– 4. Soluții complexe –

Ecuațiile de gradul al doilea au forma generală $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \neq 0$ și $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pentru a rezolva aceste ecuații, calculăm discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$. În funcție de semnul acestuia, avem trei cazuri posibile pentru soluțiile ecuației:

1) $\Delta > 0$, ecuația are două soluții reale distincte $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

2) $\Delta = 0$, ecuația are o singură soluție reală dublă $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

3) $\Delta < 0$, ecuația are două soluții complexe distincte $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, unde $i^2 = -1$.

Exemple de rezolvare

Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:

1) $x^2 + 1 = 0$

Rezolvare

Rezolvăm ecuația $x^2 + 1 = 0$ astfel:

$$x^2 = -1 \rightarrow x^2 = i^2 \rightarrow x = \pm i \in \mathbb{C}$$

Soluțiile ecuației $x^2 + 1 = 0$ sunt $-i$ și i .

2) $x^2 + 4x + 5 = 0$

Rezolvare

Identificăm coeficienții $a = 1$, $b = 4$ și $c = 5$.

$$\text{Calculăm } \Delta = b^2 - 4ac. \Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16 - 20 = -4$$

$$\text{Deoarece } \Delta < 0, \text{ ecuația are două soluții complexe distincte } x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm i\sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \frac{2(-2 \pm i)}{2} = -2 \pm i \in \mathbb{C}$$

Soluțiile complexe ale ecuației $x^2 + 4x + 5 = 0$ sunt $-2 - i$ și $-2 + i$.

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

3) $x^2 - x + 1 = 0$

Rezolvare

Identificăm coeficienții $a = 1$, $b = -1$ și $c = 1$.

Calculăm $\Delta = b^2 - 4ac$. $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$

Deoarece $\Delta < 0$, ecuația are două soluții complexe distincte $x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm i\sqrt{3}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$$

Soluțiile complexe ale ecuației $x^2 - x + 1 = 0$ sunt $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$.

4) $x^2 - 2x + 5 = 0$

Rezolvare

Procedăm astfel: $x^2 - 2x + 5 = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x - 1)^2 + 4$

Rezolvăm ecuația:

$$(x - 1)^2 + 4 = 0 \rightarrow (x - 1)^2 = -4 \rightarrow (x - 1)^2 = (2i)^2 \rightarrow x - 1 = \pm 2i \rightarrow x = 1 \pm 2i \in \mathbb{C}$$

Soluțiile complexe ale ecuației $x^2 - 2x + 5 = 0$ sunt $1 - 2i$ și $1 + 2i$.

Rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea cu soluții complexe este un element esențial al algebrei. Atunci când discriminantul Δ este negativ, soluțiile ecuației nu sunt reale, ci complexe și implică unitatea imaginară i .

Probleme propuse

Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuațiile:

1) $x^2 - 6x + 10 = 0$

2) $x^2 + 4x + 8 = 0$

3) $2x^2 - 6x + 5 = 0$