

Rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea

– 3. Relațiile lui Viète –

Ecuațiile de gradul al doilea au forma generală $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \neq 0$ și $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Pe lângă metoda clasică de rezolvare folosind discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$, există opțiunea utilizării relațiilor lui Viète pentru a găsi soluțiile ecuațiilor.

$$\text{Relațiile lui Viète: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}, \text{ unde } x_1 \text{ și } x_2 \text{ sunt soluțiile ecuației } ax^2 + bx + c = 0$$

Exemple de rezolvare

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

$$1) x^2 - 5x + 6 = 0$$

Rezolvare

Identificăm coeficienții $a = 1, b = -5, c = 6$ și aplicăm relațiile lui Viète.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{1} = 5$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{1} = 6$$

Găsim două numere care la înmulțire dau 6 și la adunare 5. Numerele sunt 2 și 3.

Verificăm soluțiile în ecuația dată: pentru $x_1 = 2$ avem $2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 0 \rightarrow 0 = 0$,

iar pentru $x_2 = 3$ obținem $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0 \rightarrow 0 = 0$.

Soluțiile ecuației $x^2 - 5x + 6 = 0$ sunt 2 și 3.

$$2) x^2 + 6x + 8 = 0$$

Rezolvare

Identificăm coeficienții $a = 1, b = 6, c = 8$ și aplicăm relațiile lui Viète.

$$x_1 + x_2 = -6$$

$$x_1 \cdot x_2 = 8$$

Găsim două numere care la înmulțire dau 8 și la adunare -6 . Numerele sunt -2 și -4 .

Verificare: $x_1 = -2 \rightarrow (-2)^2 + 6 \cdot (-2) + 8 = 0 \rightarrow 4 - 12 + 8 = 0 \rightarrow 0 = 0$

$x_2 = -4 \rightarrow (-4)^2 + 6 \cdot (-4) + 8 = 0 \rightarrow 16 - 24 + 8 = 0 \rightarrow 0 = 0$

Soluțiile ecuației $x^2 + 6x + 8 = 0$ sunt -2 și -4 .

Profesor Blaga Mirela-Gabriela

3) $x^2 - (2m + 1)x + m(m + 1) = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$

Rezolvare

Identificăm coeficienții $a = 1$, $b = -(2m + 1)$, $c = m(m + 1)$ și aplicăm relațiile lui Viète.

$$x_1 + x_2 = 2m + 1$$

$$x_1 \cdot x_2 = m(m + 1)$$

Găsim două numere care la înmulțire dau $m(m + 1)$ și la adunare $2m + 1$. Numerele sunt m și $m + 1$. Verificăm soluțiile identificate în ecuația dată.

$$x_1 = m \rightarrow m^2 - (2m + 1) \cdot m + m(m + 1) = 0 \rightarrow m^2 - 2m^2 - m + m^2 + m = 0 \rightarrow 0 = 0$$

$$x_2 = m + 1 \rightarrow (m + 1)^2 - (2m + 1) \cdot (m + 1) + m(m + 1) = 0 \rightarrow m^2 + 2m + 1 - 2m^2 - m - 2m - 1 + m^2 + m = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Soluțiile ecuației sunt m și $m + 1$ pentru $m \in \mathbb{R}$.

Relațiile lui Viète sunt metode eficiente pentru găsirea și verificarea soluțiilor ecuațiilor de gradul al doilea. Ele permit identificarea rapidă a soluțiilor prin cunoașterea coeficienților ecuației, clarificând structura acestora și asigurând corectitudinea soluțiilor.

Probleme propuse

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

1) $x^2 - 6x + 5 = 0$

2) $x^2 + 14x + 48 = 0$

3) $x^2 - (3m + 1)x + m(2m + 1) = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$