Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Rezolvarea ecuațiilor de gradul al doilea

— 1. Metoda discriminantului —

Ecuațiile de gradul al doilea au forma generală $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a \neq 0$ și $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Pentru a rezolva aceste ecuații, calculăm discriminantul $\Delta = b^2 - 4ac$.

În funcție de semnul acestuia, avem trei cazuri posibile pentru soluțiile ecuației:

1) $\Delta > 0$, ecuația are două soluții reale distincte $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

2) $\Delta = 0$, ecuația are o singură soluție reală dublă $x_1 = x_2 = \dfrac{-b}{2a}$

3) $\Delta < 0$, ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ nu are soluții reale.

Exemple de rezolvare

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

1) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Rezolvare

Identificăm coeficienții a, b, c, astfel $a = 2$, $b = -5$ și $c = 3$.

Calculăm $\Delta = b^2 - 4ac$. $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$

Deoarece $\Delta > 0$, ecuația are două soluții reale de forma $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{5 + 1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}$$

Soluțiile ecuației $2x^2 - 5x + 3 = 0$ sunt 1 și $\dfrac{3}{2}$.

2) $x^2 + 4x + 4 = 0$

Rezolvare

Identificăm coeficienții a, b, c, astfel $a = 1$, $b = 4$ și $c = 4$.

Calculăm $\Delta = b^2 - 4ac$. $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

Deoarece $\Delta = 0$, ecuația are o soluție reală dublă $x = \dfrac{-b}{2a}$. $x = \dfrac{-4}{2 \cdot 1} = \dfrac{-4}{2} = -2 \in \mathbb{R}$

Ecuația $x^2 + 4x + 4 = 0$ are soluția -2.

3) $-3x^2+4x-5=0$

Rezolvare

Identificăm coeficienții a, b, c, astfel $a=-3, b=4$ și $c=-5$.

Calculăm $\Delta=b^2-4ac$. $\Delta=4^2-4\cdot(-3)\cdot(-5)=16-60=-44$

Deoarece $\Delta<0$, ecuația $-3x^2+4x-5=0$ nu are soluții reale.

4) $x^2+(m+1)x+m=0$, unde $m\in\mathbb{R}$

Rezolvare

Identificăm coeficienții a, b, c, astfel $a=1$, $b=m+1$ și $c=m$.

Calculăm $\Delta=b^2-4ac$.

$\Delta=(m+1)^2-4\cdot1\cdot m=m^2+2m+1-4m=m^2-2m+1=(m-1)^2\geq0$

Deoarece $\Delta\geq0$ pentru orice $m\in\mathbb{R}$, ecuația are soluții reale $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

$$x_{1,2}=\frac{-(m+1)\pm\sqrt{(m-1)^2}}{2\cdot1}=\frac{-(m+1)\pm|m-1|}{2}$$

$$x_1=\frac{-(m+1)-(m-1)}{2}=\frac{-m-1-m+1}{2}=\frac{-2m}{2}=-m\in\mathbb{R}$$

$$x_2=\frac{-(m+1)+(m-1)}{2}=\frac{-m-1+m-1}{2}=\frac{-2}{2}=-1\in\mathbb{R}$$

Soluțiile ecuației sunt -1 și $-m$ dacă $m\in\mathbb{R}-\{1\}$ și -1 dacă $m=1$.

Probleme propuse

Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuațiile:

1) $x^2-6x+5=0$

2) $x^2-6x+9=0$

3) $x^2-6x+10=0$

4) $x^2-(2m+1)x+m(m+1)=0$, unde $m\in\mathbb{R}$