Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Teorema lui Cauchy

Teorema lui Cauchy Fie funcțiile $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:
1) f și g continue pe $[a, b]$,
2) f și g derivabile pe (a, b),
atunci $\exists c \in (a, b)$ astfel încât $\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c)$.

Teorema lui Cauchy Fie funcțiile $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$ cu proprietățile:
1) f și g continue pe $[a, b]$,
2) f și g derivabile pe (a, b),
3) $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$, atunci $g(a) \neq g(b)$ și
$\exists c \in (a, b)$ astfel încât $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Problema 1 Aplicați Teorema lui Cauchy funcțiilor $f, g: [1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = 2x^2 - x - 1$.

f și g sunt funcții elementare continue pe $[1, 2]$ și derivabile pe $(1, 2)$.
$f'(x) = 2x - 4$, $g'(x) = 4x - 1 \neq 0$, $x \in (1, 2)$, iar $g(1) = 0 \neq g(2) = 5$
Conform Teoremei lui Cauchy $\exists c \in (1, 2)$ astfel încât $\dfrac{f(2) - f(1)}{g(2) - g(1)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

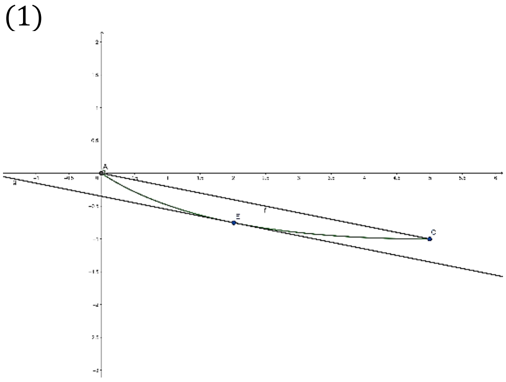
$$\frac{-1 - 0}{5 - 0} = \frac{2c - 4}{4c - 1} \to c = \frac{3}{2} \in (1, 2) \ (1)$$

Problema 2 Aplicați Teorema lui Cauchy funcțiilor $f, g: \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = 3\sin x$.

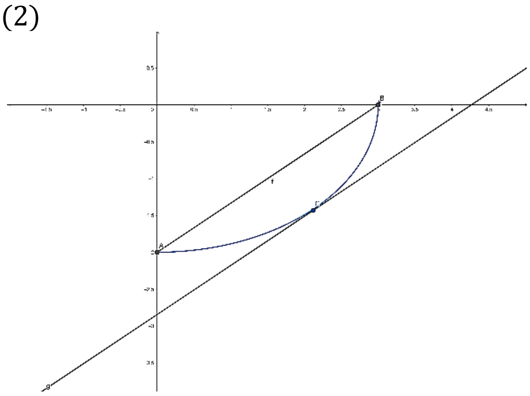
f și g sunt funcții elementare continue pe $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ și derivabile pe $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.
$f'(x) = -2\sin x$, $g'(x) = 3\cos x \neq 0$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, iar $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3 \neq g(\pi) = 0$
Conform Teoremei lui Cauchy $\exists c \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel încât $\dfrac{f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{g(\pi) - g\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

$$\frac{-2 - 0}{0 - 3} = \frac{-2\sin c}{3\cos c} \to tg\ c = -1 \to c = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \ (2)$$

(1)



(2)



Credit grafice: GeoGebra

https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_value_theorem#Cauchy's_mean_value_theorem