Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Rezolvarea unui sistem liniar omogen

Rezolvați sistemul liniar omogen (S): $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+ay-z=0 \\ 2x-ay+2z=0 \end{cases}$, $a\in\mathbb{R}$.

Rezolvare

Un sistem liniar omogen este întotdeauna compatibil.

Etapa 1. Calculăm $det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -a & 2 \end{vmatrix}=-2a-4=-2(a+2)$

Din rezolvarea ecuației $det(A)=0$, avem $a+2=0$ și obținem $a=-2\in\mathbb{R}$.

Etapa 2. Rezolvăm sistemul (S) pe cazuri: $\begin{cases} Cazul\ I.\ det(A)\neq 0 \\ Cazul\ II.\ det(A)=0 \end{cases}$.

$Cazul\ I.\ det(A)\neq 0$, când $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Sistemul omogen (S) este compatibil determinat și admite soluția banală $(x,y,z)=(0,0,0)$.

$Cazul\ II.\ det(A)=0$ pentru $a=-2$

Atașăm sistemului (S): $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-2y-z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \end{cases}$ matricele A și $\bar{A}$ (matricea extinsă).

$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Determinantul principal $\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=-3\neq 0$ și $det(A)=0 \rightarrow rangA=2$.

Determinantul caracteristic este $\Delta_c=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$ și pentru că $\Delta_p\neq 0 \rightarrow rang\bar{A}=2$.

Deoarece $rangA=rang\bar{A}$ sistemul (S) este compatibil, conform Teoremei Kronecker-Capelli.

În cazul $a=-2$ este vorba de sistem compatibil nedeterminat, care admite o infinitate de soluții.

Din alegerea făcută anterior pentru calcularea Δ_p, avem x și y necunoscute principale, iar z este necunoscută secundară. Fixăm $z=\alpha\in\mathbb{R}$. (S) se reduce la rezolvarea sistemului $\begin{cases} x+y=-\alpha \\ x-2y=\alpha \end{cases}$,

care admite soluțiile $(x,y,z)=\left(-\frac{\alpha}{3},-\frac{2\alpha}{3},\alpha\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.