Profesor Blaga Mirela-Gabriela

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} a+1 \\ a \\ a-1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

   a)Calculați $detA$.

   b)Determinați inversa matricei A .

   c)Aflați soluțiile sistemului $A \cdot X = B$, unde $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Considerăm polinomul $f = X^3 - 3mX^2 + (3m^2 - 1)X + m(1-m)(m+1) \in \mathbb{R}[X]$.

   a)Pentru $m = 0$, aflați rădăcinile polinomului f.

   b)Rezolvați ecuația $f(x) = 0$, știind că rădăcinile sunt în progresie aritmetică.

   c)Aflați valoarea reală a lui m, pentru care f se divide la polinomul $X^2 - 4X + 3$.

Rezolvare

1. a) $detA = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 2 - 0 - 0 + 4 = 6$

1. b) $A^{-1} = \dfrac{1}{detA} A^*, detA = 6 \neq 0 \ \rightarrow \ A^{-1} = \dfrac{1}{6} A^*$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. c) Ecuația matriceală $A \cdot X = B$, pentru care $detA \neq 0$ are soluția $X = A^{-1} \cdot B$.

$$X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+1 \\ a \\ a-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} a+1 \\ 3a-3 \\ 2a-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$

2. a) Pentru $m = 0$, polinomul f este $f = X^3 - X = X(X-1)(X+1)$, cu rădăcinile reale $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

2. b) Polinomul f are rădăcinile x_1, x_2, x_3 în progresie aritmetică dacă $x_1 + x_3 = 2x_2$ (1) .

$x_1 + x_2 + x_3 = 3m$ (2) din Relațiile lui Viète

Din (1) și (2) obținem $3x_2 = 3m \ \rightarrow \ x_2 = m$, de unde $f(x_2) = 0 \ \rightarrow f(m) = 0$.

Polinomul f se descompune astfel $f = (X - m)(X^2 - 2mX + m^2 - 1)$, iar polinomul $X^2 - 2mX + m^2 - 1$ are rădăcinile $x_1 = m - 1$ și $x_3 = m + 1$, $m \in \mathbb{R}$.

2. c) Polinomul f se divide cu $X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$ dacă

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(3) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -m^3 + 3m^2 - 2m = 0 \\ -m^3 + 9m^2 - 26m + 24 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m \in \{0, 1, 2\} \\ m \in \{2, 3, 4\} \end{cases} \rightarrow \ m = 2 \in \mathbb{R} .$$