Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Continuitatea unei funcţii derivabile

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ punct de acumulare, I interval sau reuniune de intervale

Funcția f este derivabilă în x_0 dacă și numai dacă $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) \in \mathbb{R}$.

Funcția f este derivabilă pe I dacă este derivabilă în fiecare punct din I.

Orice funcție derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Orice funcție derivabilă pe o mulțime este continuă pe acea mulțime.

Probleme

1. Studiați derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1 \\ \ln x + x + 1 & , x > 1 \end{cases}$ în punctul $x_0 = 1$.

Calculăm derivata laterală la stânga lui x_0 cu ajutorul definiției $f_s'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$,

analog calculăm derivata laterală la dreapta lui x_0 cu $f_d'(x_0) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Studiem derivabilitatea funcției f în punctul 1, unde $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.

$$f_s'(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \frac{(x-1)(x+1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} (x+1) = 2$$

$$f_d'(1) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\ln x + x + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{\ln(1 + x - 1) + x - 1}{x - 1} = 1 + 1 = 2$$

Deoarece $f_s'(1) = 2 = f_d'(1) \in \mathbb{R}$, funcția f este derivabilă în 1 și $f'(1) = 2$.

2. Studiați continuitatea și derivabilitatea funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , x \leq 1 \\ \ln x + x + 1 & , x > 1 \end{cases}$.

(1) $f(x) = x^2 + 1$ funcție elementară $\to$ f continuă și derivabilă pe $(-\infty, 1)$

(2) $f(x) = \ln x + x + 1$ sumă de funcții elementare $\to$ f continuă și derivabilă pe $(1, \infty)$

(3) funcția f este continuă în 1 $\Leftrightarrow$ $f_s(1) = f(1) = f_d(1) \Leftrightarrow 2 = 2 = 2$

$f_s(1) = f(1) = 1^2 + 1 = 2$ și $f_d(1) = \ln 1 + 1 + 1 = 2$

Pentru studiul derivabilității funcției f în 1, utilizăm Consecința Teoremei lui Lagrange:

Fie $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, I interval. Dacă funcția f este continuă pe I, derivabilă pe $I \setminus \{x_0\}$ și există limita $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$, atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

(4) $f'(x) = \begin{cases} 2x & , x < 1 \\ \dfrac{1}{x} + 1 & , x > 1 \end{cases}$, $\begin{cases} f_s'(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 2x = 2 \\ f_d'(1) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(\dfrac{1}{x} + 1\right) = 2 \end{cases}$ și $f'(1) = 2 \in \mathbb{R}$

Din (1), (2), (3) și (4) funcția f este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$.

3. Aflați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1, x \le 2 \\ x + b \quad, x > 2 \end{cases}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

(1) $f(x) = ax^2 + 1$ funcție elementară $\to$ f continuă și derivabilă pe $(-\infty, 2)$

(2) $f(x) = x + b$ funcție elementară $\to$ f continuă și derivabilă pe $(2, \infty)$

(3) f este continuă în 2 $\Leftrightarrow$ $f_s(2) = f(2) = f_d(2) \Leftrightarrow 4a + 1 = 4a + 1 = 2 + b$

(4) $f'(x) = \begin{cases} 2ax, x < 2 \\ 1 \quad, x > 2 \end{cases}, \begin{cases} f_s'(2) = 4a \\ f_d'(2) = 1 \end{cases}$, f este derivabilă în 2 $\Leftrightarrow f_s'(2) = f_d'(2) \Leftrightarrow 4a = 1$

Din (1), (2), (3) și (4) funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 1 \\ 4a + 1 = 2 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \in \mathbb{R} \\ b = 0 \in \mathbb{R} \end{cases}$.

4. Aflați $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax + b, x \le e \\ ln^2 x \quad, x > e \end{cases}$ este derivabilă în e .

Observații

1) Derivabilitatea unei funcții nu este definită pentru punctele izolate ale domeniului său și pentru punctele în care funcția nu este continuă.

2) Funcțiile continue pot avea derivate laterale egale într-un punct fără a fi derivabile în acel punct.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}, f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \to f'(0) = \infty \in \overline{\mathbb{R}}$

3) Funcția lui Weierstrass este un exemplu de funcție continuă în orice punct din interval, dar nu este derivabilă în niciun punct din interval.
https://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function