

Fișa individualizată – 3

Clasa a XII-a

Subiectul I

1. Determinați al zecelea termen al șirului 1, 5, 9,
2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - x^2$. Calculați $f(0) \cdot f(1) \cdot \dots \cdot f(10)$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-2} = 2 - x$.
4. Considerăm toate numerele naturale de trei cifre scrise cu elemente din mulțimea $\{1, 2\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr, acesta să fie divizibil cu 3.
5. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctele $A(5, -2)$ și $B(2, -5)$.
6. Calculați lungimea înălțimii duse din A în triunghiul ABC , unde $AB = AC = 6$ și $C = \frac{\pi}{6}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Arătați că $(I_2 - A)^2 = I_2 - A$.
 - b) Demonstrați că mulțimea $G = \{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.
 - c) Calculați $\det(I_2 - A + A^2 - A^3 + \dots + A^{2024})$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 + 5X + a \in \mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 .
 - a) Determinați a pentru care $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.
 - b) Arătați că polinomul f are cel puțin o rădăcină în $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
 - c) Calculați $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3)$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 2 \cdot \arctg x$.
 - a) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f paralelă cu axa Ox .
 - b) Aflați ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $+\infty$.
 - c) Arătați că $f\left(3^{-\frac{1}{2}}\right) > f\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)$.
2. Considerăm funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x}}$.
 - a) Calculați $\int_1^2 f(x) \cdot \sqrt{x} dx$.
 - b) Determinați volumul corpului determinat de graficul funcției $g: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x+2) \cdot f(x)$.
 - c) Fie $I_n = \int_1^2 x^n \cdot f(x) dx$. Arătați că $I_{n+1} + 2I_n = \frac{2^{n+1}\sqrt{2} - 2}{2n+1}$.