Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Schema Poisson

Schema Poisson este folosită pentru a calcula probabilitatea apariției unui număr de evenimente rare, într-un interval de timp sau spațiu dat, când probabilitatea acestora este constantă.

Problema 1. Avem trei cutii care conțin roboți. Prima cutie conține 20 roboți, din care 4 sunt defecți. A doua cutie conține 16 roboți, din care 4 sunt defecți, iar a treia cutie conține 14 roboți, din care 2 sunt defecți. Extragem câte un robot din fiecare cutie. Care este probabilitatea ca exact unul dintre roboții extrași să fie defect?

Rezolvare

Calculăm probabilitatea după formula:

$p(x) = (p_1x + q_1)(p_2x + q_2)(p_3x + q_3) =$

$= p_1p_2p_3x^3 + (q_1p_2p_3 + p_1q_2p_3 + p_1p_2q_3)x^2 + (p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3)x + q_1q_2q_3$

p_1 reprezintă probabilitatea ca roboții din prima cutie să fie defecți, iar q_1 este evenimentul contrar
p_2 reprezintă probabilitatea ca roboții din a doua cutie să fie defecți, iar q_2 este evenimentul contrar
p_3 reprezintă probabilitatea ca roboții din a treia cutie să fie defecți, iar q_3 este evenimentul contrar

Evenimentul cerut este $X = 1$ fiindcă exact unul dintre roboții extrași trebuie să fie defect.

$p_1 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $q_1 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$
$p_2 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, $q_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
$p_3 = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$, $q_3 = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$

Coeficientul lui x din polinomul $p(x)$ reprezintă probabilitatea ca exact unul dintre roboții extrași să fie defect la extragerile din cele trei cutii. Probabilitatea este

$P(X = 1) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7} + \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{6}{7} + \frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7} = \frac{54}{140} = 0{,}3857$.

Schema Bernoulli

Schema Bernoulli este folosită pentru a descrie experimente ale căror rezultate sunt binare (succes sau eșec). Prin utilizarea acestei scheme, putem calcula probabilitatea unui număr specific de succese într-un număr dat de încercări.

Formula generală pentru schema Bernoulli este $P(X=k)=C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.

Unde:
$P(X=k)=$ probabilitatea de a obține k succese în n încercări
$n=$ numărul total de încercări
$p=$ probabilitatea de a obține un succes în fiecare încercare
$C_n^k=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, $n \geq k \geq 0$ ($C_n^k=$ combinări de n luate câte k)

Problema 2. Un test medical are o precizie de 98%. Dacă 100 de persoane fac testul, care este probabilitatea ca cel puțin una dintre ele să fie diagnosticată greșit?

Rezolvare

Evenimentul binar este diagnosticarea greșită a unei persoane, iar probabilitatea succesului (probabilitatea de a fi diagnosticată greșit) este de 2%, deoarece probabilitatea de a fi diagnosticată corect este de 98%. Presupunem că persoanele sunt testate independent una de cealaltă și că probabilitatea de a fi diagnosticată greșit este aceeași pentru fiecare din ele.

Probabilitatea ca toate persoanele să fie diagnosticate corect este

$P(X=0)=C_n^0 \cdot p^0 \cdot (1-p)^n=(1-p)^n$,

iar probabilitatea ca cel puțin una dintre cele n persoane să fie diagnosticată greșit este

$P(X \geq 1)=1-P(X=0)=1-(1-p)^n$.

Unde:
$X=$ numărul de succese (numărul de persoane care sunt diagnosticate greșit)
$p=$ probabilitatea de succes (2% sau 0,02)
$n=$ numărul de încercări (100 persoane)

Probabilitatea ca cel puțin una dintre cele 100 de persoane să fie diagnosticată greșit este

$P(X \geq 1)=1-P(X=0)=1-(1-0{,}02)^{100}=1-(0{,}98)^{100}=1-0{,}13261=0{,}8673$

Probleme propuse

Problema 3. Dacă un curs este transmis pe trei canale diferite, cu probabilitățile de recepționare de 0,95, 0,86 și 0,77, care este probabilitatea ca acesta să fie recepționat corect pe două dintre canale? (Poisson)

$P(X=2)=q_1p_2p_3+p_1q_2p_3+p_1p_2q_3$

$P(X=2)=0{,}05\cdot 0{,}86\cdot 0{,}77+0{,}95\cdot 0{,}14\cdot 0{,}77+0{,}95\cdot 0{,}86\cdot 0{,}23$

Problema 4. Calculați probabilitatea de a obține o ameliorare la exact 55 de pacienți din cei 100 tratați, cunoscând faptul că probabilitatea de a obține o ameliorare pentru un singur pacient este de 1/4 . (Bernoulli)

$P(X=55)=C_{100}^{55}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{55}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^{100-55}$

Informații suplimentare găsiți la adresele:

http://math.etc.tuiasi.ro:81/rosu/didactic/MS%20II_Slides_Camp%20Probabilitate_II.pdf
https://adrianmanea.xyz/docs/17-18-fia-intprob/seminar12-scheme-prob.pdf