Profesor Blaga Mirela-Gabriela

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

   a)Arătați că $(I_2-A)^2=I_2-A$.

   b)Demonstrați că mulțimea $G=\{A^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$ este finită.

   c)Calculați $det(I_2-A+A^2-A^3+\ \dots\ +A^{2024})$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2+5X+a\in\mathbb{R}[X]$ cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

   a)Determinați a pentru care $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$.

   b)Arătați că polinomul f are cel puțin o rădăcină în $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

   c)Calculați $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$.

Rezolvare

1. a) $I_2-A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}$

$(I_2-A)^2=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -6 & 3\end{pmatrix}=I_2-A$

1. b) $A^2=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}=A \ \rightarrow\ A^3=A^2\cdot A=A \ \rightarrow\ A^n=A\ ,n\in\mathbb{N}^*$

$|G|=1, G$ finită

1. c) $det(I_2-A+A^2-A^3+\ \dots\ +A^{2024})=det\left(I_2\underbrace{-A+A}_{O_2}\underbrace{-A+A}_{O_2}+\ \dots\ \underbrace{-A+A}_{O_2}\right)=$

$=detI_2=1$

2. a) $x_1+x_2+x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}$ și din relațiile lui Viète deducem că $S_1=\frac{S_2}{S_3}$, unde

$S_1=-\frac{3}{1}, S_2=\frac{5}{1}, S_3=-\frac{a}{1}$. Obținem ecuația $3a=5$ cu soluția $a=\frac{5}{3}\in\mathbb{R}$.

2. b) ${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2={S_1}^2-2S_2 \ \rightarrow\ {x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=9-10=-1<0$

și f are cel puțin o rădăcină din $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

2. c) Polinomul $f=X^3+3X^2+5X+a$ se descompune în factori ireductibili astfel

$f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$, iar $f(2)=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=30+a$.