Profesor Blaga Mirela-Gabriela

SUBIECTUL I

1. Calculați $\log_2 4 + \sqrt{48} - \left(2+\sqrt{3}\right)^2$.
2. Determinați mulțimea valorilor funcției $f:[1,3] \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^{x+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.
4. Aflați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre suma cifrelor sale să fie 7.
5. Aflați raza cercului înscris în triunghiul ABC, unde $AB = 7, BC = 8$ și $CA = 9$.
6. Arătați că $sin135° \cdot sin45° - cos45° \cdot cos135° = 1$.

Rezolvare

1. $\log_2 4 + \sqrt{48} - \left(2+\sqrt{3}\right)^2 = 2 + 4\sqrt{3} - \left(4 + 4\sqrt{3} + 3\right) = -5$

2. Funcția de gradul al doilea $f(x) = x^2 - 3x + 2$ are $a = 1 > 0$, atunci vârful este punct de minim și $x_V = -\dfrac{b}{2a}$, adică $x_V = \dfrac{3}{2} \in [1,3]$, iar valoarea minimă a funcției este $y_V = -\dfrac{\Delta}{4a}$ sau $y_V = f(x_V) = -\dfrac{1}{4}$. Calculăm $f(1)$, respectiv $f(3)$ pentru a determina valoarea maximă și implicit determinăm mulțimea valorilor funcției.

Obținem că $f(x) \in \left[-\dfrac{1}{4}, 2\right]$.

O altă abordare este:

$f'(x) = 2x - 3$ și din rezolvarea ecuației $f'(x) = 0$ obținem $x = \dfrac{3}{2} \in [1,3]$

x	$-\infty$	1		$\frac{3}{2}$		3	∞
$f'(x)$	$-\ -\ -$		$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$		$+\ +\ +$
$f(x)$	∞	$f(1) = 0$	$\searrow$	$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$f(3) = 2$	∞

Pentru $x \in [1,3]$, mulțimea valorilor funcției sau imaginea funcției este intervalul $\left[-\dfrac{1}{4}, 2\right]$.

3. $8^{x+\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ obținem $2^{3\left(x+\frac{1}{2}\right)} = 2^{\frac{1}{2}}$ egalăm exponenții $3\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ rezolvăm ecuația și obținem soluția $x = -\frac{1}{3} \in \mathbb{R}$

4. probabilitatea $P = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$

$\overline{ab}$, $a \in \{1,2,3,\ldots,9\}$, $b \in \{0,1,2,3,\ldots,9\}$

Deducem că a poate lua 9 valori, iar b poate lua 10 valori și numărul numerelor naturale de două cifre este $9 \cdot 10 = 90$, care reprezintă numărul cazurilor posibile.

Suma cifrelor numărului $\overline{ab}$ este 7, în următoarele cazuri

$a + b = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4 = 4 + 3 = 5 + 2 = 6 + 1 = 7 + 0$

Constatăm că numărul cazurilor favorabile este 7, iar $P = \frac{7}{90}$.

5. Calculăm raza cercului înscris cu formula $r = \frac{S}{p}$, unde S este aria tiunghiului și p este semiperimetrul triunghiului ABC. Calculăm p, apoi S și aflăm r.

$p = \frac{a+b+c}{2}$, $a = BC = 8$, $b = AC = 9$, $c = AB = 7$ avem $p = \frac{8+9+7}{2} = 12$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ înlocuim și calculăm $S = \sqrt{12 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} = 12\sqrt{5}$

$r = \frac{12\sqrt{5}}{12} = \sqrt{5}$

6. $cos\,a \cdot cos\,b - sin\,a \cdot sin\,b = cos(a+b)$

$sin135° \cdot sin45° - cos45° \cdot cos135° = -cos(45° + 135°) = -cos180° = 1$