Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Probleme de numărare

1. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr natural de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie număr par.

Numărul cazurilor favorabile este obținut scăzând din cazurilor posibile, cazurile în care produsul cifrelor este număr impar.

Probabilitatea este $P = \dfrac{9 \cdot 10 - 5 \cdot 5}{9 \cdot 10} = \dfrac{65}{90} = \dfrac{13}{18}$.

2. Aflați câte numere impare de două cifre se pot forma cu cifrele 2, 3, 4, 5, 7.

$card\ M$ reprezintă numărul elementelor mulțimii date în problemă.

$card\ M = 5$, $a \in M, b \in \{3, 5, 7\}$ atunci $\begin{matrix} \overline{a\ \ b} \\ \downarrow\ \ \downarrow \\ 5 \cdot 3 \end{matrix}$, se pot forma 15 numere impare.

3. Determinați câte numere de trei cifre au exact două cifre egale.

Numerele $\overline{abc}$ care corespund cerinței sunt de forma $\overline{aab}, \overline{aba}, \overline{abb}$, unde $a \neq b$ și $a \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}, b \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$.

$\begin{matrix} \overline{aab} & & \overline{aba} & & \overline{abb} \\ \downarrow\ \downarrow & + & \downarrow\downarrow & + & \downarrow\ \downarrow \\ 9 \cdot 9 & & 9 \cdot 9 & & 9 \cdot 9 \end{matrix} \rightarrow\ 9 \cdot 9 \cdot 3 = 243$ numere de trei cifre au exact două cifre egale.

4. Fie M mulțimea numerelor de trei cifre, care au cifrele egale cu 0, 1, 2 sau 3. Aflați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea M, acesta să aibă cifrele diferite două câte două.

$card\ M = 4$, $a, b, c \in M, a \neq 0$, atunci numărul cazurilor posibile este $\begin{matrix} \overline{a\ \ b\ \ c} \\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\ 3 \cdot 4 \cdot 4 \end{matrix}$.

$card\ M = 4$, $a, b, c \in M, a \neq 0$ și $a \neq b \neq c \neq a$, numărul cazurilor favorabile este $\begin{matrix} \overline{a\ \ b\ \ c} \\ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\ 3 \cdot 3 \cdot 2 \end{matrix}$.

Probabilitatea este $P = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 4} = \dfrac{3}{8}$.

5. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr natural de trei cifre, produsul cifrelor acestuia să fie număr impar.

Numărul cazurilor posibile este $\begin{array}{c} \overline{a\ \ b\ \ c} \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ 9 \cdot 10 \cdot 10 \end{array}$, unde $a, b, c \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}, a \neq 0$.

$a \cdot b \cdot c =$ număr impar dacă a, b, c sunt impare și numărul cazurilor favorabile este $5 \cdot 5 \cdot 5$.

Probabilitatea este $\mathrm{P} = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 5}{9 \cdot 10 \cdot 10} = \dfrac{5}{36}$.

6. Determinați câte numere de trei cifre, cu cifrele din mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, conțin o singură cifră pară.

Mulțimea cifrelor pare din mulțimea dată este $P = \{2, 4, 6\}$, unde $card\ P = 3$ și mulțimea cifrelor impare este $I = \{1, 3, 5, 7\}$, $card\ I = 4$.

$a \in P$ și $b, c \in I$ atunci $\begin{array}{c} \overline{a\ \ b\ \ c} \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ 3 \cdot 4 \cdot 4 \end{array}$, adică 48 de numere care au doar prima cifră a pară, analog

$b \in P$ și $a, c \in I$ atunci $\begin{array}{c} \overline{a\ \ b\ \ c} \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ 4 \cdot 3 \cdot 4 \end{array}$, respectiv $c \in P$ și $a, b \in I$ atunci $\begin{array}{c} \overline{a\ \ b\ \ c} \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ 4 \cdot 4 \cdot 3 \end{array}$.

Numărul numerelor de trei cifre, cu cifre din $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, care au o singură cifră pară este $48 \cdot 3 = 144$.

7. Determinați câte submulțimi cu două elemente are mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

Numărul submulțimilor cu două elemente ale unei mulțimi cu zece elemente este $C_{10}^{2} = 45$.

8. Determinați câte submulțimi cu trei elemente, care au exact un element număr par, are mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

Submulțimile cu trei elemente $\{a, b, c\}$ au a număr par în număr de C_5^1, iar b și c numere impare în număr de C_5^2 . Numărul submulțimilor de trei elemente cu exact un element număr impar este $C_5^1 \cdot C_5^2 = 5 \cdot 10 = 50$.

9. Aflați câte numere formate din patru cifre distincte se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3.

$A_4^4 - A_3^3 = 24 - 6 = 18$

sau $a \neq 0$ și $a \neq b \neq c \neq d \neq a$ $\begin{array}{c} \overline{a\ \ b\ \ c\ \ d} \\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow \\ 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{array}$ adică 18 numere.

10. Determinați câte numere naturale de patru cifre distincte se pot scrie în baza 10.

Subînțelegem că mulțimea cifrelor este $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$, iar numărul numerelor de patru cifre disticte este $A_{10}^4 - A_9^3$.

11. Aflați câte dintre submulțimile mulțimii $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ conțin cel puțin un număr impar.

Numărul submulțimilor unei mulțimi cu zece elemente este 2^{10}.

Numărul submulțimilor unei mulțimi cu cinci elemente pare este 2^5.

Numărul submulțimilor unei mulțimi cu zece elemente, care conțin cel puțin un element număr impar este $2^{10} - 2^5$.

12. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Aflați câte funcții bijective $f: A \to A$ au proprietatea $f(1) \neq 1$.

Numărul funcțiilor bijective $f: A \to A$, unde $card\ A = 6$ este $6!$.

Din proprietatea $f(1) \neq 1$, formăm funcții bijective $g: A \setminus \{1\} \to A \setminus \{1\}$ în număr de $5!$.

În concluzie, numărul funcțiilor bijective $f: A \to A$ cu proprietatea $f(1) \neq 1$ este $6! - 5!$.

13. Aflați numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$ cu proprietatea $f(1) = a$.

$f(1) = a \ \to \ f(1)$ ia o valoare

$f(2) \in \{a, b, c\} \to f(2)$ poate lua oricare din cele trei valori

$f(3) \in \{a, b, c\} \to f(3)$ poate lua oricare din cele trei valori

$f(4) \in \{a, b, c\} \to f(4)$ poate lua oricare din cele trei valori

Numărul funcțiilor $f: \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c\}$ au proprietatea $f(1) = a$ este $1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

14. Într-o grupă sunt 12 elevi, dintre care 5 sunt fete. Aflați în câte moduri se poate alege un comitet format din 3 fete și 2 băieți.

$$C_5^3 \cdot C_7^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 10 \cdot 21 = 210$$

15. Într-o grupă sunt 13 elevi, dintre care 6 sunt fete. Aflați în câte moduri se poate forma o echipă de 5 elevi care să conțină cel puțin 4 fete.

Echipa poate fi formată din patru fete și un băiat sau din cinci fete.

$$C_6^4 \cdot C_7^1 + C_6^5 = 105 + 6 = 111$$