Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Puncte de extrem. Teorema lui Fermat

În problemele matematice, economice sau tehnice, este important de ştiut care sunt maximele şi minimele anumitor mărimi variabile.

Definiţie. Fiind dată o funcţie $f: D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, un punct $x_0 \in D$ se numeşte:
a) punct de maxim relativ/local al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$ să avem $f(x) \leq f(x_0)$,
b) punct de minim relativ/local al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$ să avem $f(x) \geq f(x_0)$.

Dacă $f(x) \leq f(x_0)$, (respectiv, $f(x) \geq f(x_0)$), $\forall x \in D$, atunci x_0 este punct de maxim (respectiv, de minim) absolut/global al lui f.
Punctele de maxim, respectiv de minim ale unei funcții se numesc puncte de extrem.
Valorile funcției în punctele de extrem se numesc extremele funcției.

Teorema lui Fermat

Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval, $f: I \to \mathbb{R}$ şi $x_0 \in I$ un punct de extrem local pentru funcţia f interior lui I. Dacă f este derivabilă în punctul x_0, atunci $f'(x_0) = 0$.

Demonstraţie
Dacă x_0 este punct de maxim, atunci există o vecinătate U a lui x_0
astfel încât $f(x) \leq f(x_0), \forall x \in U \ \rightarrow \ f(x) - f(x_0) \leq 0$.
f este derivabilă în punctul x_0, atunci

$$f'(x_0) = f_s{}'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$f'(x_0) = f_d{}'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

şi obținem $f'(x_0) = 0$.
Cazul x_0 punct de minim se tratează analog.

Consecință. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f: I \to \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe I, atunci punctele de extrem local ale lui f se găsesc printre soluțiile ecuației $f'(x_0) = 0$.

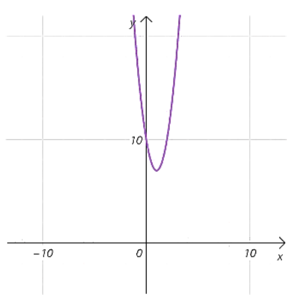
Definiție. Punctele în care prima derivată se anulează se numesc puncte critice sau staționare.

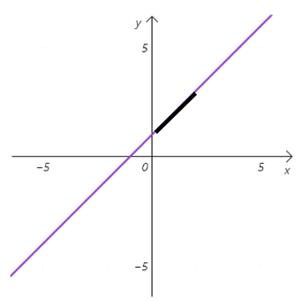
Interpretare geometrică. Teorema lui Fermat exprimă faptul că, dacă graficul funcției f admite o tangentă într-un punct de extrem local interior lui I, atunci tangenta la grafic în acest punct este paralelă cu axa Ox.

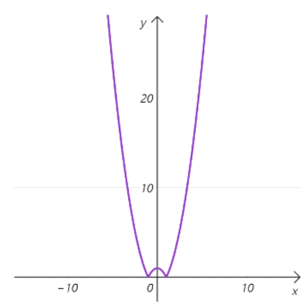
Exerciții

1. Verificați aplicabilitatea teoremei lui Fermat pentru funcțiile:
$a)$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 6x + 10$,
$b)$ $f: [0,2] \to \mathbb{R}, f(x) = x + 1$,
$c)$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x^2 - 1|$,
$d)$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x^2}$,
$e)$ $f: [-2,2] \to \mathbb{R}, f(x) = |4 - x^2|$.

$a)$ f este funcție de gradul al doilea: $a = 3 > 0, x_v = -\dfrac{b}{2a} = 1 \in \mathbb{R}$ punct de minim/extrem.
f funcție elementară, funcție derivabilă, $f'(x) = 6x - 6$ și $f'(1) = 6 - 6 = 0$ (T. Fermat)
$b)$ f este funcție de gradul întâi: $a = 1 > 0, f$ strict crescătoare.
Pe intervalul $[0,2], f(0) = 1$ este valoarea minimă a funcției, iar $f(2) = 3$ este valoarea maximă a funcției. f este funcție elementară, funcție derivabilă, $f'(x) = 1$ și $f'(0) = 1 \neq 0$, $f'(2) = 1 \neq 0$. $x_0 = 0$ este punct de minim, $x_0 = 2$ este punct de maxim, însă cele două puncte nu respectă condiția esențială a teoremei Fermat de a fi din interiorul intervalului.
$c)$ Funcția f are două puncte de minim situate în -1 și 1, dar f nu e derivabilă în cele două puncte. Un punct $x_0 \in I$ poate fi punct de extrem pentru o funcție f fără să existe $f'(x_0)$.
f e funcție elementară, funcție derivabilă, $x_0 = 0$ punct de maxim, $f'(x) = -2x, x \in (-1,1)$ și $f'(0) = 0$ (T. Fermat)







2. Verificați aplicabilitatea teoremei lui Fermat în punctul 0 pentru funcția
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x^2 e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$.

3. Determinați valoarea parametrului $a > 0$, astfel încât inegalitatea $2^x + a^x \geq 3^x + 4^x$ să fie adevărată $\forall x \in \mathbb{R}$.