Polinoame – Tema 1 –

Inele de polinoame cu coeficienţi întru-un corp comutativ $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_{p, p \text{ prim}}$

Teme

1.Forma algebrică a unui polinom, funcţia polinomială, operaţii
2.Împărţirea polinoamelor. Teorema împărţirii cu rest. Teorema restului. Schema lui Horner
3.Divizibilitatea polinoamelor. Teorema lui Bézout; cmmdc şi cmmmc al unor polinoame; descompunerea unor polinoame în factori ireductibili
4.Rădăcini ale polinoamelor. Relaţiile lui Viète
5.Rezolvarea ecuaţiilor algebrice având coeficienţi în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ecuaţii binome, ecuaţii bipătrate, ecuaţii reciproce

Polinom	Forma algebrică a unui polinom este $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in K[X]$.
Exemplu	$f = 3X^5 + X^4 - 5X^2 + 2 \in \mathbb{R}[X]$
Noțiuni	X este nedeterminata.
	$a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in K$ sunt coeficienții polinomului f.
	Mulțimea coeficienților este $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_{p\ ,p \text{ număr prim}}$.
	$a_n \neq 0$ coeficient dominant
	a_0 termen liber
	a_nX^n monom
	$K[X]$ este mulțimea polinoamelor de nedeterminată X cu coeficienți în corpul comutativ K.
Gradul polinomului	Dacă $a_n \neq 0, n \in \mathbb{N}$, atunci gradul polinomului f este n, adică grad $f = n$.
	$f = 0$, grad $f = -\infty$, f este polinomul nul
	$f = a \neq 0$, grad $f = 0$, f este polinomul constant
	$f = aX + b, a \neq 0$, grad $f = 1$, f este polinom de gradul întâi
Exemple	1) $f = -X^3 + 2X^2 - 3X \in \mathbb{R}[X] \ \rightarrow\ f$ are gradul trei sau grad $f = 3$
	2) $f = (\alpha - 1)X^2 - (\alpha^2 - 1)X + 1 , \alpha \in \mathbb{R} \ \rightarrow\ \begin{cases} \alpha = 1 \rightarrow f = 1 \rightarrow \text{grad } f = 0 \\ \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\} \ \rightarrow\ \text{grad } f = 2 \end{cases}$
Valoarea unui polinom	$f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \dots + a_1\alpha + a_0 \in$ K este valoarea polinomului f în α.
Exemplu	Fie polinomul $f = -X^3 + 2X^2 - 3X \in \mathbb{R}[X]$. Calculați $f(1)$.
	$f(1) = -1 + 2 - 3 = -2 \in \mathbb{R}$
Funcția polinomială	$f: K \rightarrow K , f(x) = a_nx^n + \dots + a_1x + a_0$ se numeşte funcţie polinomială.
Exemplu	$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} , f(x) = x^4 + 2x^2 + x + 4$ este o funcţie polinomială de grad patru.

Operaţii cu polinoame

Fie polinoamele f și g:

$f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in K[X]$

$g = b_mX^m + \dots + b_nX^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_1X + b_0 \in K[X] , m, n \in \mathbb{N}, m > n.$

Egalitatea polinoamelor	$f = g \iff \begin{cases} 0 = b_m \\ \dots \\ a_n = b_n \\ \dots \\ a_0 = b_0 \end{cases}$
Exemplu	$f = 2X^2 + X - 3 \in \mathbb{R}[X]$ $g = aX^3 + bX^2 + X + c \in \mathbb{R}[X]$ $f = g \iff \begin{cases} a = 0 \in \mathbb{R} \\ b = 2 \in \mathbb{R} \\ 1 = 1 \\ c = -3 \in \mathbb{R} \end{cases}$
Adunarea polinoamelor	$f + g = b_m X^m + \dots + (a_n + b_n)X^n + \dots + (a_1 + b_1)X + a_0 + b_0 \in K[X]$ $\text{grad}(f+g) \le max(\text{grad} f, \text{grad} g)$
Exemplul 1	$f = 2X^2 + X - 3 \in \mathbb{R}[X]$ $g = -X^3 + X^2 + 4 \in \mathbb{R}[X]$ $f + g = -X^3 + 3X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X] \rightarrow \text{grad}(f+g) = 3$
Exemplul 2	$f = 2X^2 + X - 3 \in \mathbb{R}[X]$ $g = -2\,X^2 + 4 \in \mathbb{R}[X]$ $f + g = X + 1 \in \mathbb{R}[X] \rightarrow \text{grad}(f+g) = 1$
Înmulțirea polinoamelor	$f \cdot g = a_n b_m X^{n+m} + \dots + (a_n b_0 + a_0 b_n)X^n + \dots + a_0 b_0 \in K[X]$, K corp comutativ $\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad} f + \text{grad} g$
Exemplu	$f = 2X^2 + X - 3 \in \mathbb{R}[X]$ $g = -X^3 + 4 \in \mathbb{R}[X]$ $f \cdot g = -2X^5 - X^4 + 3X^3 + 8X^2 + 4X - 12 \in \mathbb{R}[X] \rightarrow \text{grad}(f \cdot g) = 5$
Observație	În cazul K inel avem $\text{grad}(f \cdot g) \le \text{grad} f + \text{grad} g$. $f = \hat{2}X^2 + X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_4[X]$ $g = \hat{2}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_4[X]$ $f \cdot g = \hat{3}X + \hat{3} \in \mathbb{Z}_4[X] \rightarrow \text{grad}(f \cdot g) = 1$
Inelul polinoamelor	$(K[X], +, \cdot)$ este inelul polinoamelor cu coeficienți în corpul comutativ K.
Exemplu	$(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$

Exercițiul 1	Stabiliți gradul polinomului $f = aX^4 + 2X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$.
Exercițiul 2	Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, știind că $f(1+i) = 0$, unde $f = aX^3 + X^2 + b$.
Exercițiul 3	Fie polinoamele $f = 5X^2 + X + 2 \in \mathbb{R}[X]$ și $g = 2X^3 + X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$. Calculați $f + g, g - f, 2f, f \cdot g, g^2$.