Polinoame – Tema 3 –

Inele de polinoame cu coeficienţi întru-un corp comutativ $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_{p, p \text{ prim}}$

Teme

1.Forma algebrică a unui polinom, funcţia polinomială, operaţii
2.Împărţirea polinoamelor. Teorema împărţirii cu rest. Teorema restului. Schema lui Horner
3.Divizibilitatea polinoamelor. Teorema lui Bézout; cmmdc şi cmmmc al unor polinoame; descompunerea unor polinoame în factori ireductibili
4.Rădăcini ale polinoamelor. Relaţiile lui Viète
5.Rezolvarea ecuaţiilor algebrice având coeficienţi în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Ecuaţii binome, ecuaţii bipătrate, ecuaţii reciproce

Împărțirea polinoamelor

$f = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X]$

$g = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$

Aflați câtul și restul la împărțirea polinomului f la g.

$$
\begin{array}{l|l}
\quad X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 & X^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-X^4 \qquad\quad - X^2 & X^2 + X + 1 \\ \cline{1-1}
\qquad\quad X^3 + X^2 + X + 1 & \\
\qquad -X^3 \qquad - X & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad X^2 \qquad + 1 & \\
\qquad\qquad -X^2 \qquad - 1 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad / \qquad\quad / &
\end{array}
$$

$f = g \cdot q + r$

$X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$

Restul la $f : g$ este zero, astfel că f este divizibil cu g ($f \vdots g$) sau g divide f ($g|f$).

Exercițiul 1

Arătați că $f = X^3 - 4X^2 + X + 6 \in \mathbb{R}[X]$ este divizibil cu $g = X - 2$.

Teorema lui Bézout

<u>Teorema lui Bézout</u>

Un element $a \in K$ este rădăcină a polinomului $f \in K[X] \Leftrightarrow f \vdots (X - a)$.

$f \vdots (X - a) \Leftrightarrow f(a) = 0$

Polinomul $f \in K[X]$ este divizibil cu $X - a$ dacă și numai dacă $f(a) = 0$.

Exemplu

Determinați $a \in \mathbb{R}$, știind că $f = X^3 + aX^2 - X + 4$ este divizibil cu $g = X - 2$.

Conform Teoremei lui Bézout $f(2) = 0 \ \rightarrow \ 4a + 10 = 0 \ \rightarrow a = -\dfrac{5}{2} \in \mathbb{R}$.

cmmdc

(f, g) este c.m.m.d.c. = cel mai mare divizor comun al polinoamelor f și g

Exemplul 1

Determinaţi cmmdc al polinoamelor $f = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ şi $g = X^2 + 1$.

$X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1) \ \rightarrow f = g \cdot q \ \rightarrow \ (f, g) = g$

Exemplul 2

Determinaţi cmmdc al polinoamelor $f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 5$ şi $g = X^2 + 1$.

$$
\begin{array}{l|l}
\quad X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 5 & X^2 + 1 \\ \cline{2-2}
-X^4 \qquad\quad - X^2 & X^2 + 2X + 2 \\ \cline{1-1}
\qquad\quad 2X^3 + 2X^2 + 4X + 5 & \\
\qquad -2X^3 \qquad - 2X & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\quad 2X^2 + 2X + 5 & \\
\qquad\qquad -2X^2 \qquad - 2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad\quad 2X + 3 &
\end{array}
$$

După prima împărțire $f : g$ constatăm că restul este diferit de zero și împărțim

$$
\begin{array}{l|l}
X^2 \qquad\quad + 1 & 2X + 3 \\
\cline{2-2}
-X^2 - \frac{3}{2}X & \frac{1}{2}X - \frac{3}{4} \\
\cline{1-1}
\quad -\frac{3}{2}X + 1 & \\
\quad \frac{3}{2}X + \frac{9}{4} & \\
\cline{1-1}
\qquad \frac{13}{4} &
\end{array}
$$

Restul $\frac{13}{4} \neq 0$ împărțim $2X + 3$ la $\frac{13}{4}$ și obținem $2X + 3 = \frac{13}{4}\left(\frac{8}{13}X + \frac{12}{13}\right) + 0$

Restul fiind acum zero, conform algoritmului lui Euclid avem $(f, g) = 1$ $\left(\frac{13}{4} \sim 1\right)$.

Observație $(f, g) = 1$ atunci f și g sunt prime între ele.

Definiție Divizorii de forma a și $af, a \in K^*$ se numesc divizori improprii ai lui f.

Dacă există şi alţi divizori ai lui f aceştia se numesc divizori proprii.

Exemplu $f = X - 1$ are divizorii improprii $a \in K^*$ și af.

$f = X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$ are divizorii proprii , $K = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Definiție Un polinom $f \in K[X]$ se numește ireductibil peste corpul K dacă are gradul cel puțin unu și dacă nu are divizori proprii, altfel se numește reductibil peste K.

Exemplu $f = X - 1$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X], \mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$.

$f = X^2 - 2$ este ireductibil în $\mathbb{Z}[X], \mathbb{Q}[X]$ și reductibil în $\mathbb{R}[X], \mathbb{C}[X]$.

cmmmc $[f, g]$ este c.m.m.m.c. = cel mai mic multiplu comun al polinoamelor f și g

$$[f, g] = \frac{fg}{(f, g)}, f, g \neq 0$$

Exemplul 1 Determinaţi cmmmc al polinoamelor $f = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$ și $g = X^2 + 1$.

$$[f, g] = \frac{fg}{(f, g)} = \frac{(X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1)(X^2 + 1)}{X^2 + 1} = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$$

Exemplul 2 Determinaţi cmmmc al polinoamelor $f = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 5$ și $g = X^2 + 1$.

$$[f, g] = \frac{fg}{(f, g)} = \frac{(X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 5)(X^2 + 1)}{1} = fg$$

Propoziție Singurele polinoame ireductibile din $\mathbb{C}[X]$ sunt polinoamele de gradul întâi.

Descompunerea polinomului peste $\mathbb{C}$ Descompunerea polinomului $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X]$ în factori ireductibili este $f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \ldots (X - x_n)$, unde $a_n \neq 0$ și $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ sunt rădăcinile polinomului f.

Exemplu $f = X^4 + X^2 + 1 =$

$$= \left(X - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right) \in \mathbb{C}[X]$$

Propoziție	Fie $f \in \mathbb{C}[X]$ un polinom de grad n, având rădăcinile $x_1, x_2, \dots, x_k$ multiple de ordine $n_1, n_2, \dots, n_k$, unde $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Descompunerea lui f în factori liniari este $f = a_n(X - x_1)^{n_1}(X - x_2)^{n_2} \dots (X - x_k)^{n_k}$.
Exemplu	$f = -(X-2)^3(X+1)^2 \rightarrow 2$ este rădăcină triplă și -1 este rădăcină dublă a lui f.
Corolar	Dacă polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ de grad cel mult n se anulează pentru $n+1$ valori distincte, atunci $f = 0$.
Propoziție	Polinoamele ireductibile din $\mathbb{R}[X]$ sunt polinoamele de gradul întâi și polinoamele de gradul al doilea fără rădăcini reale.
Descompunerea polinomului peste $\mathbb{R}$	$f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X], a_n \neq 0$ $f = a_n(X - x_1)(X - x_2) \dots (X - x_i)(X^2 + b_1X + c_1) \dots \left(X^2 + b_jX + c_j\right)$
Exemplu	$f = X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1) \in \mathbb{R}[X]$
Exercițiul 2	Arătați că $f = (X-2)^5 + (2-X)^2 \in \mathbb{R}[X]$ se divide cu $g = X - 1$.
Exercițiul 3	Să se determine numerele reale a și b, știind că f se divide prin g, unde $f = X^4 + (a+b)X^2 + 2bX + 1$, $g = X^2 + 3X + 2$.
Exercițiul 4	Determinați numărul natural n, astfel încât $f = (X^2 + X - 1)^{3n+1} - X$ să fie divizibil cu $g = X^2 - 1$.
Exercițiul 5	Arătați că $g = X^2 - 2X + 1$ divide polinomul $f = X^{2n+1} - (2n+1)X + 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$.