Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Hiperbola

Definiție

Hiperbola este locul geometric al punctelor pentru care diferența distanțelor la două puncte fixe, numite focare, este constantă.

$H = \{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ |MF' - MF| = 2a\ , a \in \mathbb{R}_+^*\}$

Ecuația canonică a hiperbolei

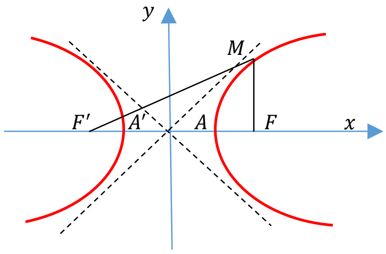
$$H = \left\{M(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle|\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\ , b^2 = c^2 - a^2, a, b, c \in \mathbb{R}_+^*\right\}$$

Focarele hiperbolei sunt două puncte fixe de coordonate $F(c, 0)$ și $F'(-c, 0)$.

$FF' = 2c > 0$

$H: |MF' - MF| = 2a\ , a < c$

$y = \pm\frac{b}{a}x$ reprezintă ecuațiile asimptotelor oblice



Originea reperului cartezian $O(0,0)$ este centrul de simetrie al hiperbolei.

Ox, Oy sunt axe de simetrie.

a este semiaxa mare a hiperbolei și b este semiaxa mică.

Vârfurile hiperbolei sunt punctele $A(a, 0), A'(-a, 0)$.

Ecuațiile parametrice ale hiperbolei

$$H: \begin{cases} x = -a \cdot cht \\ y = b \cdot sht \end{cases}, t \in \mathbb{R}\ , x \leq -a\ , cht = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, sht = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$H: \begin{cases} x = a \cdot cht \\ y = b \cdot sht \end{cases}, t \in \mathbb{R}\ , x \geq a$$

Ecuații carteziene explicite

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad , x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$$

Tangenta la hiperbolă

Tangenta la hiperbolă în punctul $M_0(x_0, y_0) \in H$ se obține prin dedublarea ecuației hiperbolei.

Obținem ecuația tangentei:

$$t: \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Aplicația 1. Scrieți vârfurile și focarele hiperbolei $H: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

$a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \rightarrow A(3,0), A'(-3,0)$

$b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c^2 = 9 + 16 = 25 \rightarrow c = 5 \rightarrow$

$F(5,0), F'(-5,0)$ sunt focarele hiperbolei H.

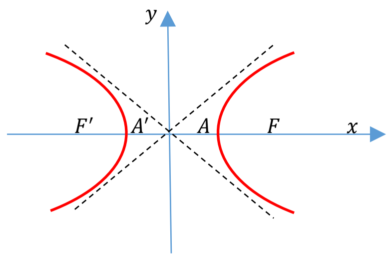
Aplicația 2. Desenați hiperbola de ecuație $H: 4x^2 - 9y^2 = 36$.

$H: 4x^2 - 9y^2 = 36 \,|: 36 \rightarrow H: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$

$A(3,0), A'(-3,0)$ vârfurile lui H

$F(\sqrt{13}, 0), F'(-\sqrt{13}, 0)$ focarele lui H

$y = \pm\frac{2}{3}x$ sunt ecuațiile asimptotelor oblice



Aplicația 3. Scrieți ecuația tangentei în punctul $A\left(-5, \frac{9}{4}\right)$ la hiperbola $H: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

$t: \frac{-5 \cdot x}{16} - \frac{9}{4} \cdot \frac{y}{9} = 1 \rightarrow t: 5x + 4y + 16 = 0$

Problema 1. Scrieți ecuația hiperbolei care are un vârf $A'(-4,0)$ și un focar $F(5,0)$.

Problema 2. Desenați hiperbola de ecuație $H: \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$.