Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Regulile lui l'Hospital

Regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$

teorema 1 Fie $f, g: I \to \mathbb{R}$ funcții de variabilă reală, I interval din $\mathbb{R}$ și x_0 punct de acumulare pentru I. Dacă:

1) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$
2) f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$
3) $g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$
4) $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$

atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în punctul x_0 și $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

exemplu

Calculați limita $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Constatăm că funcțiile asociate exercițiului sunt $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x - 2$ și $g(x) = x - 1$ funcții elementare, derivabile și care îndeplinesc condițiile teoremei anterioare, atunci

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2 + x - 2)'}{(x - 1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{2x + 1}{1} = \frac{2 + 1}{1} = 3$$

exercițiu Calculați limita $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}$.

Regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{\infty}{\infty}$

teorema 2 Fie $f, g: I \to \mathbb{R}$ funcții de variabilă reală, I interval din $\mathbb{R}$ și x_0 punct de acumulare pentru I. Dacă:

1) $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty$
2) f și g sunt derivabile pe $I \setminus \{x_0\}$
3) $g'(x) \neq 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}$
4) $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \overline{\mathbb{R}}$

atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în punctul x_0 și $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

exemplu

Calculați limita $\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x}$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \frac{e^\infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Constatăm că funcțiile asociate exercițiului sunt $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ și $g(x) = x$ funcții elementare, derivabile și care îndeplinesc condițiile teoremei 2, atunci

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty$$

Observație. Anterior derivatelor calculam limita utilizând lectura grafică a funcțiilor.

exercițiu Calculați limita $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - x - 2}{e^{-x}}$.