Profesor Blaga Mirela-Gabriela

INEGALITĂȚI – 2 –

1)Dacă $a+b+c=1$ și $a,b,c>0$ demonstrați că $2(a^2+b^2+c^2)+3(a^3+b^3+c^3)\geq 1.(1)$

Utilizăm inegalitatea mediilor.

$$\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq\frac{a+b+c}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}\geq\frac{1}{3}\to\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\geq\frac{1}{27}\to 3(a^3+b^3+c^3)\geq\frac{1}{3}\\ \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\geq\frac{1}{3}\to\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geq\frac{1}{9}\to 2(a^2+b^2+c^2)\geq\frac{2}{3}\end{array}\right\}\text{" + "}\to(1)$$

2)Arătați că $2^n>n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

I Metoda inducției matematice

$n=1\to 2^1>1\ (A)$

$P(n): 2^n>n\ (A)\to P(n+1): 2^{n+1}>n+1\ (A)$

$2^{n+1}=2^n\cdot 2>2n>n+1,\forall n>1$

II Binomul lui Newton

$2^n=(1+1)^n=1+n+C_n^2+\cdots+C_n^n\geq 1+n>n$

III Derivate

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^x-x$.

$f'(x)=2^x ln2-1$

$f'(x)=0\to\ x_0$ soluția ecuației

x	$-\infty$		$0<\ x_0\ <1$				∞
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$f(x_0)$		$\nearrow$	

$\forall x\geq 1\to f(x)\geq f(1)\to 2^x-x\geq 1\to 2^x\geq x+1>x$

IV Corolar – Mean value theorem. $2^x>x,\forall x\geq 1$

$2^1>1$

$\forall x>1\to(2^x)'>x'$

$2^x ln2>2^1 ln2=ln4>lne=1$