

1

3.	Metoda matriceală de rezolvare a sistemelor liniare Rezolvarea sistemului (1) format din n ecuații cu n necunoscute scris sub forma matriceală $A \cdot X = B$ se face în cazul în care determinantul matricei A este nenul, atunci ecuația se înmulțește la stânga cu A^{-1} și sistemul admite o singură soluție $X = A^{-1} \cdot B$.	1. $\begin{cases} x + 2y = -5 \\ 3x - y = 13 \end{cases}$ Atașăm forma matriceală a sistemului. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix}$ Rezolvăm ecuația atașată $A \cdot X = B$, înmulțind la stânga cu A^{-1}, $A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$ 2. $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$ Atașăm forma matriceală a sistemului. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ Rezolvăm ecuația atașată $A \cdot X = B$, înmulțind la stânga cu A^{-1}, $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$
4.	Metoda lui Cramer Se aplică unui sistem (1) format din n ecuații cu n necunoscute, când determinantul matricei coeficienților este nenul. Sistemul care admite o singură soluție se numește compatibil determinat. Etape 1. Calculăm Δ și se observă că $\Delta \neq 0$. Etape 2. Calculăm $\Delta x_i, i = \overline{1, n}$ prin înlocuirea coloanei i prin coloana termenilor liberi. Etape 3. Soluția sistemului este $x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$.	$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ -x + y + z = -3 \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ $\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 12$ $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4$ $\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4$ $(x, y, z) = (3, 1, -1)$

5.	Compatibilitatea sistemelor Un sistem se numește compatibil dacă are cel puțin o soluție. Dacă sistemul are o singură soluție, atunci este compatibil determinat, iar dacă are mai multe soluții sistemul este compatibil nedeterminat. Un sistem care nu are soluții se numește sistem incompatibil. Proprietatea Kronecker-Capelli. Sistemul liniar (1) este compatibil $\Leftrightarrow \text{rang}A = \text{rang}\bar{A}$ Proprietatea Rouché. Sistemul liniar (1) este compatibil $\Leftrightarrow$ toți determinanții caracteristici sunt nuli. Dacă toți termenii liberi sunt nuli, atunci sistemul este omogen.	1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ mx + y + z = 3m \end{cases}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}.$ Pentru fiecare $m \in \mathbb{R}$, notăm cu S_m mulțimea soluțiilor reale ale sistemului. a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică. b) Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil. c) Să se determine $\min\{x^2 + y^2 + z^2 \mid (x, y, z) \in S_1\}$. a) $\Delta = 2 - 2m \neq 0 \rightarrow m \neq 1 \rightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ b) $\Delta = 2 - 2m \neq 0 \rightarrow m \neq 1 \rightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow$ sistemul este compatibil determinat. $\Delta = 2 - 2m = 0 \rightarrow m = 1 \rightarrow \text{rang}A = \text{rang}\bar{A} \rightarrow$ sistemul este compatibil. c) $S_1: \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + z = 3 \end{cases} \rightarrow \text{rang}A = \text{rang}\bar{A} \rightarrow$ sistemul este compatibil nedeterminat. $\begin{cases} x - y = 1 - z \\ x + y = 3 - z \end{cases} \rightarrow (x, y, z) = (2 - z, 1, z), z \in \mathbb{R}$ $x^2 + y^2 + z^2 = (2 - z)^2 + 1 + z^2 = 2z^2 - 4z + 5 = 2(z - 1)^2 + 3 \geq 3 \rightarrow \min\{x^2 + y^2 + z^2\} = 3$ 2. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ bcx + acy + abz = 0 \end{cases}, \text{ unde } a, b, c \in \mathbb{R}^*$ și A matricea sistemului. a) Să se calculeze $\det A$. b) Să se rezolve sistemul în cazul în care a, b, c sunt distincte două câte două. c) Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului în cazul în care $a = b \neq c$. a) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = (b - a)(c - a)(c - b)$ b) $\det A = (b - a)(c - a)(c - b) \neq 0 \rightarrow$ sistemul omogen este compatibil determinat și admite soluția $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. c) $a = b \neq c \rightarrow \det A = 0 \rightarrow \text{rang}A = \text{rang}\bar{A} = 2$ sistemul este compatibil nedeterminat, atunci $\begin{cases} y + z = -x \\ ay + cz = -ax \end{cases} \rightarrow (x, y, z) = (x, -x, 0), x \in \mathbb{R}$
-----------	---	--

		3. Să se rezolve sistemul $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z + t = 2 \\ -x + y + z - t = 3 \end{cases}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ este matricea atașată sistemului și $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ matricea extinsă. $1 \neq 0$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ Astfel $\text{rang} A = \text{rang} \bar{A} = 3$, iar sistemul este compatibil nedeterminat. Fixăm $t \in \mathbb{R}$ și rezolvăm sistemul $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 2 - t \\ -x + y + z = 3 + t \end{cases}$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ $\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 - t & 1 & 1 \\ 3 + t & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4t - 2$ $\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 - t & 1 \\ -1 & 3 + t & 1 \end{vmatrix} = -2t + 2$ $\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 - t \\ -1 & 1 & 3 + t \end{vmatrix} = 2t + 8$ $(x, y, z, t) = \left(\frac{-2t - 1}{2}, \frac{-t + 1}{2}, \frac{t + 4}{2}, t \right), t \in \mathbb{R}$
	Bibliografie	1. Matematică: manual pentru clasa a XI-a, Editura Mathpress, 2006 2. Subiecte examene naționale