Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Matrice şi determinanţi. Teorie şi aplicaţii

Nr. crt.	Teorie	Exemple
1.	**Noţiunea de matrice** Se numeşte matrice cu m linii şi n coloane o funcţie $f:\{1,2,\dots,m\}\mathrm{x}\{1,2,\dots,n\}\rightarrow\mathbb{C}$. Sau $A=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ În cazul $m=n$ avem matrice pătratică de ordinul n. A^t-transpusa matricei $A^t=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{m1}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\in M_{n,m}(\mathbb{C})$	$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ $A=\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\in M_{1,3}(\mathbb{C})$ matrice linie $A=\begin{pmatrix}i\\ -1\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{C})$ matrice coloană $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$ $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ $A=\begin{pmatrix}a & b & c\end{pmatrix}\in M_{1,3}(\mathbb{C})\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbb{C})$
2.	**Egalitatea a două matrice** $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C}), A=B$ $\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$ $\rightarrow\begin{cases}a_{11}=b_{11}\\ a_{1n}=b_{1n}\\ \dots\\ a_{m1}=b_{m1}\\ a_{mn}=b_{mn}\end{cases}$	1. Rezolvaţi ecuaţia $A=B$, unde: a)$A=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$, $B=\begin{pmatrix}i\\ -1\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{C})$, b)$A=\begin{pmatrix}a & b-2\\ c+1 & 1-d\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A,B\in M_2(\mathbb{C})$. a)Ecuaţia nu are sens, deoarece matricele A şi B nu sunt de acelaşi tip. b)$A=B$ $\begin{pmatrix}a & b-2\\ c+1 & 1-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b-2=4\\ c+1=0\\ 1-d=1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=6\\ c=-1\\ d=0\end{cases}$ 2. Să se determine $x,y,z,t\in\mathbb{R}$ astfel încât matricele să fie egale: $A=\begin{pmatrix}2^x-3 & y+3\\ z-1 & 2-t\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}, A,B\in M_2(\mathbb{R})$.
3.	**Adunarea matricelor** $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{C})$ $A+B=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{m1} & \cdots & b_{mn}\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}\in M_{m,n}(\mathbb{C})$	1. Calculaţi A+B, unde: a)$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$, $B=\begin{pmatrix}i\\ -1\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{C})$, b)$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}, A,B\in M_2(\mathbb{C})$.

	$(M_{m,n}(\mathbb{C}),+)$ este grup abelian 1)"+" este bine definită, 2)"+" este asociativă, 3)matricea nulă este element neutru, $O_{m,n} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, 4)orice matrice are opusă, $-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{C})$, 5)"+" este comutativă.	a)Adunarea nu are sens, deoarece matricele A şi B nu sunt de acelaşi tip. b)$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1-1 & 2+4 \\ -1+0 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ 2. Calculaţi A+B, unde: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 4 & 7 \\ 0 & \sqrt{2} & -5 \\ 0 & 6 & -9 \end{pmatrix}$, $A, B \in M_3(\mathbb{C})$.
4.	**Înmulţirea cu scalari a matricelor** $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ şi $a \in \mathbb{C} \rightarrow aA \in M_{m,n}(\mathbb{C})$	1. Calculaţi -2A, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, $A \in M_3(\mathbb{C})$. $-2A = \begin{pmatrix} -2\cdot 1 & -2\cdot 2 & -2\cdot 3 \\ -2\cdot 2 & -2\cdot 4 & -2\cdot 6 \\ -2\cdot 3 & -2\cdot 6 & -2\cdot 9 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -4 & -8 & -12 \\ -6 & -12 & -18 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ 2. Calculaţi $4i \cdot A$, unde $A = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{C})$.
5.	**Înmulţirea matricelor** $\left.\begin{matrix} A \in M_{m,n}(\mathbb{C}) \\ B \in M_{n,p}(\mathbb{C}) \end{matrix}\right\} \rightarrow AB \in M_{m,p}(\mathbb{C})$ $AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+..+a_{1n}b_{n1} & .. & a_{11}b_{1p}+..+a_{1n}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11}+..+a_{mn}b_{n1} & .. & a_{m1}b_{1p}+..+a_{mn}b_{np} \end{pmatrix}$ $AB \in M_{m,p}(\mathbb{C})$ Observaţii: 1.Înmulţirea matricelor AB are sens dacă numărul de coloane din matrice A este egal cu numărul de linii din matricea B, $(m,\underline{n})(\underline{n},p) \rightarrow (m,p)$. 2.Pentru BA avem $(n,\underline{p})(\underline{m},n)$ unde numărul de coloane din matrice B este diferit de numărul de linii din matricea A, aşa că înmulţirea BA nu are sens. 3.În general, înmulţirea matricelor nu este comutativă, adică AB≠BA.	1. Calculaţi AB, unde: a)$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A, B \in M_2(\mathbb{C})$, b)$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), B = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{C})$, c)$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$, $B = (5 \quad -1 \quad 0) \in M_{1,3}(\mathbb{C})$, d)$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $A, B \in M_3(\mathbb{C})$. a)$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 0 & 1\cdot 4+2\cdot 1 \\ -1\cdot(-1)+3\cdot 0 & -1\cdot 4+3\cdot 1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} -1 & 4+2 \\ 1 & -4+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, b)$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot i+2\cdot(-1) \\ 3\cdot i+5\cdot(-1) \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} i-2 \\ 3i-5 \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{C})$, c)Înmulţirea AB nu are sens, deoarece matricea A are 3 coloane, iar matricea B are o linie.

	$(M_n(\mathbb{C}),\cdot)$ este monoid, 1)"$\cdot$" este bine definită, 2)"$\cdot$" este asociativă, 3) matricea unitate este element neutru, $I_n=\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&1&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{C})$.	d)$AB=\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&0&-5\\3&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&4&0\\-1&3&2\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}-2\cdot1+1\cdot(-2)+3\cdot(-1)&-2\cdot0+1\cdot4+3\cdot3&-2\cdot1+1\cdot0+3\cdot2\\1\cdot1+0\cdot(-2)+(-5)(-1)&1\cdot0+0\cdot4+(-5)\cdot3&1\cdot1+0\cdot0+(-5)\cdot2\\3\cdot1+(-3)\cdot(-2)+0\cdot(-1)&3\cdot0+(-3)\cdot4+0\cdot3&3\cdot1+(-3)\cdot0+0\cdot2\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}-7&13&4\\6&-15&-9\\9&-12&3\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$. 2. Calculaţi BA şi $A^2(A^2=A\cdot A)$, unde: a)$A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&4\\0&1\end{pmatrix}, A,B\in M_2(\mathbb{C})$, b)$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C}), B=\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}\in M_{2,1}(\mathbb{C})$, c)$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$, $B=\begin{pmatrix}5&-1&0\end{pmatrix}\in M_{1,3}(\mathbb{C})$, d)$A=\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&0&-5\\3&-3&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&4&0\\-1&3&2\end{pmatrix}$, $A,B\in M_3(\mathbb{C})$.
6.	**Ridicarea la putere a unei matrice** $A^n=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{de\ n\ ori}, A\in M_n(\mathbb{C}), n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$	1. Calculaţi A^n, unde: a)$A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$, b)$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$, c)$A=\begin{pmatrix}cosx&sinx\\-sinx&cosx\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$, d)$A=\begin{pmatrix}1&2x&5x^2-2x\\0&1&5x\\0&0&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$, e)$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\in M_4(\mathbb{R})$. a)$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$ $A^3=I_2\cdot A=A$ ş.a.m.d. $A^n=\begin{cases}A, & n=număr\ impar\\I_2, & n=număr\ par\end{cases}$ b)Matricea A are formă diagonală şi o descompunem astfel $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\3&2&0\end{pmatrix}=I_3+B$ apoi, utilizăm Binomul lui Newton

$A^n = (I_3 + B)^n = C_n^0 {I_3}^n + C_n^1 {I_3}^{n-1} B +$
$+ C_n^2 {I_3}^{n-2} B^2 + \cdots + C_n^n B^n$, unde

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

şi $I_3^n = I_3, I_3^{n-1} B = B \ldots$

$A^n = C_n^0 I_3 + C_n^1 B + C_n^2 B^2$

$= I_3 + nB + \frac{n(n-1)}{2} B^2$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$+ \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 2n^2 + n & 2n & 1 \end{pmatrix}$

c) $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} cos^2 x - sin^2 x & 2sinxcosx \\ -2sinxcosx & cos^2 x - sin^2 x \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} cos2x & sin2x \\ -sin2x & cos2x \end{pmatrix}$

Deducem $A^n = \begin{pmatrix} cosnx & sinnx \\ -sinnx & cosnx \end{pmatrix}$

şi demonstrăm prin metoda inducţiei matematice.

Presupunem $A^{n+1} =$

$\begin{pmatrix} \cos(n+1)x & sin(n+1)x \\ -sin(n+1)x & cos(n+1)x \end{pmatrix}$ verificăm

$A^{n+1} = A^n \cdot A$

$= \begin{pmatrix} cosnx & sinnx \\ -sinnx & cosnx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos(n+1)x & sin(n+1)x \\ -sin(n+1)x & cos(n+1)x \end{pmatrix}$ adevărat.

d)$A_x \cdot A_y =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2x & 5x^2 - 2x \\ 0 & 1 & 5x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2y & 5y^2 - 2y \\ 0 & 1 & 5y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2(x+y) & 5(x+y)^2 - 2(x+y) \\ 0 & 1 & 5(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= A_{x+y}$

$A_x^2 = A_x \cdot A_x = A_{x+x} = A_{2x}$

$A_x^n = A_{nx} \to A_x^{n+1} = A_{(n+1)x}$

$A_x^{n+1} = A_x^n \cdot A_x = A_{nx} \cdot A_x = A_{(n+1)x}$

		e)$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$ $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$ $A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$ $A^4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I_4$ $A^n=\begin{cases}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}, n=4k+1, k\in\mathbb{N}\\\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}, n=4k+2, k\in\mathbb{N}\\\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}, n=4k+3, k\in\mathbb{N}\\\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=I_4, n=4k, k\in\mathbb{N}^*\end{cases}$ 2.$A(x)=\begin{pmatrix}\text{cosx}&0&i\text{sinx}\\0&1&0\\i\text{sinx}&0&\text{cosx}\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C}), x\in\mathbb{R}$ a)Calculaţi det $A(\pi)$. b)Arătaţi că $A(x)A(y)=A(x+y)$. c)Determinaţi numerele reale x pentru care $(A(x))^{2012}=I_3$. $(bac'2012)$
7.	**Urma matricei pătratice** TrA=urma matricei pătratice este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A. $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\in M_n(\mathbb{C})$ TrA=$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$	1.Calculaţi urma matricei A, unde: a)$A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$, b)$A=\begin{pmatrix}i&1\\-1&i\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$, c)$A=\begin{pmatrix}cosx&sinx\\-sinx&cosx\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$, d)$A=\begin{pmatrix}1-\sqrt{3}&2\\4&1+\sqrt{3}\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$, e)$A=\begin{pmatrix}1&\log_3 5\\\log_5 3&2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>a)$\mathrm{Tr}A = -1 - 1 = -2$
b)$\mathrm{Tr}A = \mathrm{i} + \mathrm{i} = 2\mathrm{i}$
c)$\mathrm{Tr}A = cosx + cosx = 2cosx$
d)$\mathrm{Tr}A = 1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 2$
e)$\mathrm{Tr}A = 1 + 2 = 3$

2.Calculaţi urma matricei A, unde:
a)$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$,
b)$A = \begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ i-1 & 1-2i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$,
c)$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$,
d)$A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} & 2 \\ \sqrt{7} & 1+\sqrt{7} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$,
e)$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.</td>
</tr>
<tr>
<td>8.</td>
<td>Determinantul de ordinul doi

Determinantul ataşat matricei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$
este $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \in \mathbb{C}$.

Observaţie: Matricea este o funcţie, iar determinantul este un număr.</td>
<td>1.Calculaţi determinanţii ataşaţi matricelor date:
a)$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$,
b)$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$,
c)$A = \begin{pmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$,
d)$A = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} & 2 \\ 4 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$,
e)$A = \begin{pmatrix} 1 & \log_3 5 \\ \log_5 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

a) $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$
b) $\begin{vmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{vmatrix} = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$
c) $\begin{vmatrix} cosx & sinx \\ -sinx & cosx \end{vmatrix} = cos^2x + sin^2x = 1$
d) $\begin{vmatrix} 1-\sqrt{3} & 2 \\ 4 & 1+\sqrt{3} \end{vmatrix} = (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) - 8$
$= 1 - 3 - 8 = -10$
e) $\begin{vmatrix} 1 & \log_3 5 \\ \log_5 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - \log_5 3 \cdot \log_3 5 = 2 - 1$
$= 1$

2.Calculaţi determinanţii ataşaţi matricelor date:
a)$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$,
b)$A = \begin{pmatrix} 1+i & 3 \\ i-1 & 1-2i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$,
c)$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$,
d)$A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{7} & 2 \\ \sqrt{7} & 1+\sqrt{7} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$,
e)$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.</td>
</tr>
</table>

9.	**Teorema Hamilton-Cayley** (T.H-C) pentru matrice pătratice de ordinul doi Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$. $A^2-TrA\cdot A+detA\cdot I_2=O_2$ sau $A^2-(a+d)\cdot A+(ad-bc)\cdot I_2=O_2$ Propoziţie.Ecuaţia ataşată teoremei este $x^2-(a+d)\cdot x+(ad-bc)=0$ cu soluţiile $x_1,x_2\in\mathbb{C}$, atunci $A^n=\begin{cases}\dfrac{x_2^n-x_1^n}{x_2-x_1}A+\dfrac{x_2.x_1^n-x_1.x_2^n}{x_2-x_1}I_2, & x_1\neq x_2\\ nx^{n-1}A+(1-n)x^nI_2, & x=x_1=x_2\end{cases}$ $n\in\mathbb{N}^*, n\geq 2$.	1.Să se arate că $A^2+2A+I_2=O_2$, unde $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Varianta1. Aplicăm T.H-C $A^2-(-1-1)A+1\cdot I_2=O_2$ $\rightarrow A^2+2A+I_2=O_2$ Varianta2. Calculăm $A^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A^2+2A+I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O_2$ 2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}$. $(bac'2013)$ a)Calculaţi det A. b)Arătaţi că $A^2-6A=I_2$. c)Determinaţi inversa matricei $B=A-6I_2$. Variantă.Din b) avem $A(A-6I_2)=I_2$, atunci inversa matricei $B=A-6I_2$, det $B\neq 0$ este matricea A, deoarece $B^{-1}\cdot B=I_2$.
10.	**Determinantul de ordinul trei** Metode pentru calcul 1.Calculul determinantului folosind Regula triunghiului $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=$ $=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}$ $-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}$ 2.Calculul determinantului folosind Regula lui Sarrus $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=$ $\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{matrix}$ $=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{31}a_{22}a_{13}$ $-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{21}a_{12}a_{33}$ 3.Calculul determinantului folosind dezvoltarea după o linie $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=$ $+a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$	1.Calculaţi determinanţii: a) $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix}-\sqrt{3}&4&7\\0&\sqrt{2}&-5\\0&6&-9\end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix}-2&1&3\\1&0&-5\\3&-3&0\end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix}1&0&1\\-2&4&0\\-1&3&2\end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix}1&2x&5x^2-2x\\0&1&5x\\0&0&1\end{vmatrix}$ a) $\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{vmatrix}=Regula\ triunghiului=$ $1\cdot4\cdot9+2\cdot6\cdot3+2\cdot6\cdot3-3\cdot4\cdot3-6\cdot6\cdot1$ $-2\cdot2\cdot9=36+36+36-36-36-36=0$ sau utilizând proprietăţile determinanţilor observăm că avem două linii/coloane proporţionale $\rightarrow$ determinantul este nul. b) $\begin{vmatrix}-\sqrt{3}&4&7\\0&\sqrt{2}&-5\\0&6&-9\end{vmatrix}=$ $dezvoltare\ după\ prima\ coloană$ $=-\sqrt{3}\cdot\begin{vmatrix}\sqrt{2}&-5\\6&-9\end{vmatrix}=-\sqrt{3}(-9\sqrt{2}+30)$

4.Calculul determinantului folosind dezvoltarea după o coloană

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$+a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Observaţie: Semnele cu care apar elementele provin din signatura permutărilor sau astfel $\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$ indiferent de valoarea sau expresia care ocupă un loc în determinant.

5.Calculul determinantului folosind proprietăţile→12

Observaţie: Pentru calculul determinanţilor de ordin ≥ 4 se utilizează metodele 3, 4, 5.

c) $\begin{array}{|ccc|} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ 3 & -3 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \end{array} = Regula\ lui\ Sarrus =$

$= -2\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot(-3)\cdot 3 + 3\cdot 1\cdot(-5) -$
$-3\cdot 0\cdot 3 - (-2)\cdot(-3)\cdot(-5) - 1\cdot 1\cdot 0 =$
$= 0 - 9 - 15 - 0 + 30 - 0 = 6$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = dezvoltare\ după\ prima\ linie$

$= +1\cdot\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$
$= 8 - 0 - 2 = 6$

e) $\begin{vmatrix} 1 & 2x & 5x^2-2x \\ 0 & 1 & 5x \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

2.Calculaţi determinanţii:

a) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2x & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -x \\ 7 & 3x & 2 \end{vmatrix}$

3.Determinaţi numerele reale x pentru care $\det A(x) = 0$, $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{pmatrix}$. $(bac'2013)$

11. **Determinant de tip Vandermonde**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - C_1 \end{pmatrix}$$

Folosind proprietăţile determinanţilor obţinem:

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$

$= (b-a)(c-a)(c-b)$

1.Calculaţi:

$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{pmatrix} L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & y-x & y^2-x^2 \\ 0 & z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} y-x & y^2-x^2 \\ z-x & z^2-x^2 \end{vmatrix}$

$= (y-x)(z-x)\begin{vmatrix} 1 & y+x \\ 1 & z+x \end{vmatrix}$

$= (y-x)(z-x)(z-y)$

2.Calculaţi:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$

		3.Arătaţi că dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi şi $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a^2 & 3b^2 & 3c^2 \end{vmatrix} = 0$, atunci triunghiul este isoscel. $(bac'2012)$
12.	**Proprietăţile determinanţilor** 1.Dacă într-un determinant toate elementele unei linii sau coloane sunt nule, atunci determinantul este nul.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$
	2.Dacă un determinant are două linii sau coloane identice, atunci determinantul este nul.	$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \\ 2 & 9 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad (L_1 = L_2)$
	3.Dacă elementele a două linii sau coloane ale unui determinant sunt proporţionale atunci, determinantul este nul.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \qquad (L_2 = 3L_1)$
	4.Dacă o linie sau o coloană a unui determinant este o combinaţie liniară de celelalte linii sau coloane, atunci determinantul este nul.	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad (L_1 + L_2 = L_3)$
	5.Dacă toate elementele unei linii sau coloane ale unui determinant sunt înmulţite cu un număr k, atunci valoarea determinantului iniţial o înmulţim cu k.	$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ k & 2k & 5k \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 7 & 9 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$
	6.Dacă într-un determinant se permută între ele două linii sau două coloane, atunci determinantul obţinut este opusul determinantului iniţial.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (permutare L_1 cu L_2)
	7.Dacă într-un determinant se adună la elementele unei linii sau coloane, elementele altei linii respectiv coloane înmulţite cu un acelaşi număr, atunci valoarea determinantului nu se schimbă.	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 - 2C_1 \\ C_3 - C_1 \end{pmatrix}$ $= \begin{vmatrix} 1 & 2-2\cdot 1 & 1-1 \\ 2 & 3-2\cdot 2 & -1-2 \\ 1 & 4-2\cdot 1 & 6-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ $= \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$ sau calculând cu Regula triunghiului avem $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 18 + 8 - 2 - 3 + 4 - 24 = 1$
	8.Determinantul unei matrice pătratice este egal cu determinantul matricei transpuse. $\det A = \det(A^t), \forall A \in M_n(\mathbb{C})$	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 11$ $\det(A^t) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 11$

	9.Dacă A şi B∈$M_n(\mathbb{C})$, atunci det (AB)=det A · det B.	$\left.\begin{array}{l}1.A=\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&0&-5\\3&-3&0\end{pmatrix}\to\det A=6\\ B=\begin{pmatrix}1&0&1\\-2&4&0\\-1&3&2\end{pmatrix}\to\det B=6\end{array}\right\}\to$ $\det A\cdot\det B=36$ $AB=\begin{pmatrix}-7&13&4\\6&-15&-9\\9&-12&3\end{pmatrix}\to\det AB=36$ 2.Dacă $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ şi $AB=BA$, atunci $\det(A^2+B^2)\ge0$. $\det(A^2+B^2)=\det[(A+iB)(A-iB)]=$ $=\det(A+iB)\det(A-iB)=$ $=\det(A+iB)\det\overline{(A+iB)}=$ $=\det(A+iB)\overline{\det(A+iB)}=$ $=\lvert\det(A+iB)\rvert^2\ge0$ pentru că $z\cdot\bar{z}=\lvert z\rvert^2,z\in\mathbb{C}$
	10.Dacă o linie sau o coloană a unui determinant este o combinaţie liniară de forma $a_{ij}+b_{ij}$, atunci det A=det A_{ij}+det B_{ij}.	$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\dots&a_{1n}\\a_{i1}+b_{i1}&a_{i2}+b_{i2}\dots&a_{in}+b_{in}\\a_{n1}&a_{n2}\dots&a_{nn}\end{vmatrix}=$ $=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\dots&a_{1n}\\a_{i1}&a_{i2}\dots&a_{in}\\a_{n1}&a_{n2}\dots&a_{nn}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\dots&a_{1n}\\b_{i1}&b_{i2}\dots&b_{in}\\a_{n1}&a_{n2}\dots&a_{nn}\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}a&1&a+d\\b&1&b+d\\c&1&c+d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&1&a\\b&1&b\\c&1&c\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a&1&d\\b&1&d\\c&1&d\end{vmatrix}=0$
		1.Calculaţi determinanţii: a) $\begin{vmatrix}a&b&c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}=(L_1+L_2+L_3)$ $=\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c&a+b+c\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$ $=(a+b+c)\begin{vmatrix}1&1&1\\b&c&a\\c&a&b\end{vmatrix}$ $=(a+b+c)(bc+ab+ac-c^2-a^2-b^2)$ $=-\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2$ $+(c-a)^2]$ b)det A^n, unde $A=\begin{pmatrix}7&5\\-2&3\end{pmatrix},n\in\mathbb{N}^*,n\ge2.$ $\det A^n=(\det A)^n=31^n$ 2.Calculaţi: a) $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&a^2&1\\b&b^2&1\end{vmatrix}-bac'2013$ b) $\begin{vmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&1\end{vmatrix}-bac'2013$ c) $\begin{vmatrix}1&x&1\\1&-1&1\\x&-1&1\end{vmatrix}-bac'2013$

13.	**Rangul unei matrice** Dacă $A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$,$A$ nenulă,atunci rangul matricei A este cel mai mare dintre ordinele minorilor nenuli ai matricei A. Dacă A=O , matricea nulă, atunci rang A =0. “minor=determinant de ordin $\leq \min(m,n)$” Algoritm pentru stabilirea rangului matricei A $A=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in M_{4,3}(\mathbb{C})$ $\mathbf{2} \neq 0 \rightarrow \text{rang } A \geq 1$ $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=0$ $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}=-4 \neq 0 \rightarrow \text{rang } A \geq 2$ $\begin{vmatrix} \mathbf{2} & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-6 \neq 0 \rightarrow \text{rang } A=3$ Observaţie: rang $A \leq \min(4,3)$	1.Aflaţi rang A : a)$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ b)$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c)$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ d)$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ e)$A=\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & -1 & 1 \end{pmatrix}$, discuţie după $x \in \mathbb{R}$ f)$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ g)$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ a) $\det A=5 \neq 0$ →rang A=2 b) $\det A=6 \neq 0$ →rang A=3 c) $\det A=0 \rightarrow 2 \neq 0$ →rang A=1 d) $\det A=0$ şi oricare din determinanţii de ordinul doi sunt nuli $\rightarrow 1 \neq 0$ →rang A=1 e) $\det A=x^2-1$ $\rightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R}-\{\pm 1\} \rightarrow \det A \neq 0 \text{ și } rangA=3 \\ x=1 \rightarrow \det A=0 \text{ și} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0\, rangA=2 \\ x=-1 \rightarrow \det A=0 \text{ și} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \ rangA=2 \end{cases}$ f) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ Calculăm determinanţii de ordinul doi ataşaţi matricei A $\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0$ $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3 \neq 0$ $\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=6 \neq 0$ şi constatăm că cel puţin unul este diferit de zero, atunci rang A=2. g)$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ $\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0$ $\Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=0$ $\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=0$ constatăm că toţi determinanţii de ordinul doi sunt zero, dar există un element diferit de zero şi atunci rang A=1.

		2.Aflaţi rang A : a)$A=\begin{pmatrix}1&5\\-2&-10\end{pmatrix}$ b)$A=\begin{pmatrix}9&3\\-2&4\end{pmatrix}$ c)$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-1\\1&4&6\end{pmatrix}$ d)$A=\begin{pmatrix}m&1&1\\1&m&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, discuţie după $m\in\mathbb{R}$ e)$A=\begin{pmatrix}-5&2&1&6\\3&0&1&0\\10&-4&-2&-12\end{pmatrix}$
14.	**Matrice inversabilă** $\left.\begin{array}{l}A\in M_n(\mathbb{C})\\ \det A\neq 0\end{array}\right\}\to A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*\in M_n(\mathbb{C})$, A^t-transpusa matricei A^*-matricea adjunctă Observaţie: $A\in M_n(\mathbb{Z})$ este inversabilă în $M_n(\mathbb{Z})$ dacă și numai dacă $\det A=\pm1$.	1.Aflaţi A^{-1}: a)$A=\begin{pmatrix}2&4\\3&7\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ b)$A=\begin{pmatrix}2&5&3\\2&0&-1\\0&2&1\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{C})$ a) $\det A=2\neq0\to\exists A^{-1}$ $A^t=\begin{pmatrix}2&3\\4&7\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}+&-\\-&+\end{pmatrix}$ sunt semnele locurilor, iar în dreptul acestora vom scrie elementul obţinut prin bordarea(tăierea) liniei şi coloanei fiecărui element din matricea A^t, astfel $A^*=\begin{pmatrix}+7&-4\\-3&+2\end{pmatrix}\to$ $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7&-4\\-3&2\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ Verificare: $AA^{-1}=I_2$ sau $A^{-1}A=I_2$ b) $\det A=6\neq0\to\exists A^{-1}$ $A^t=\begin{pmatrix}2&2&0\\5&0&2\\3&-1&1\end{pmatrix}$ Varianta1. $A^*=\begin{pmatrix}+A_{11}&-A_{12}&+A_{13}\\-A_{21}&+A_{22}&-A_{23}\\+A_{31}&-A_{32}&+A_{33}\end{pmatrix}$ Bordăm prima linie şi prima coloană din A^t, calculăm determinantul care va ocupa locul A_{11} $A_{11}=\begin{vmatrix}0&2\\-1&1\end{vmatrix}=2$ $A_{12}=\begin{vmatrix}5&2\\3&1\end{vmatrix}=-1$ $A_{13}=\begin{vmatrix}5&0\\3&-1\end{vmatrix}=-5$ $A_{21}=\begin{vmatrix}2&0\\-1&1\end{vmatrix}=2$ $A_{22}=\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}=2$ $A_{23}=\begin{vmatrix}2&2\\3&-1\end{vmatrix}=-8$ $A_{31}=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4$ $A_{32}=\begin{vmatrix}2&0\\5&2\end{vmatrix}=4$ $A_{33}=\begin{vmatrix}2&2\\5&0\end{vmatrix}=-10$

$$A^* = \begin{pmatrix} +2 & -(-1) & +(-5) \\ -2 & +2 & -(-8) \\ +4 & -4 & +(-10) \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & -4 & -10 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$$

Verificare: $AA^{-1} = I_3$ sau $A^{-1}A = I_3$

Varianta2.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

matricea adjunctă este matricea complemenţilor algebrici obţinuţi din A^t prin bordarea(tăierea) liniei şi coloanei fiecărui element

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}$$

...

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2.Aflaţi A^{-1}:

a)$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b)$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

3.Determinaţi numerele întregi x pentru care inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ x & -1 & 1 \end{pmatrix}$ are elementele numere întregi. $(bac'2013)$

4.Determinaţi inversa matricei $A(2)$, unde $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$. $(bac'2013)$

15.	**Aplicaţii în geometrie** Fie punctele $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$. Ecuaţia dreptei AB este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$. A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$ Aria triunghiului *ABC* este $S = \frac{\lvert\Delta\rvert}{2}$.	1.În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P_n(n, n^2), n \in \mathbb{N}^*$. Determinaţi numărul natural $n, n \geq 3$, pentru care aria triunghiului $P_1P_2P_n$ este egală cu 1. $(bac'2013)$ $P_1(1,1), P_2(2,2^2), P_n(n,n^2)$ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ n & n^2 & 1 \end{vmatrix} = n^2 - 3n + 2$ $S = \frac{\lvert\Delta\rvert}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$ $\frac{n^2 - 3n + 2}{2} = 1$ $n^2 - 3n + 2 = 2$ $n^2 - 3n = 0$ $n(n-3) = 0 \rightarrow n = 3$ 2.Se consideră punctele $A_n(2^n, 3^n), n \in \mathbb{N}$. a)Scrieţi ecuaţia dreptei A_0A_1. b)Demonstraţi că punctele A_1, A_2, A_3 nu sunt coliniare. c)Determinaţi numărul natural n pentru care aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ este egală cu 216. $(bac'2011)$

Bibliografie

Manual pentru clasa a XI-a, Art Grup Editorial
Manual pentru clasa a XI-a, Editura Mathpress
Didactic.ro - comunitatea online a cadrelor didactice
SUBIECTE EXAMENE NAŢIONALE