Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Repartiţia unei variabile aleatoare discrete

$x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$
$p_i = P(X = x_i)$ probabilitatea cu care sunt luate valorile respective
$\{(x_i, p_i), i = \overline{1,n}\}$ repartiţia sau distribuţia variabilei aleatoare X
$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \dots & x_n \\ p_1 & p_2 \dots & p_n \end{pmatrix}$, $p_i \geq 0,\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$
$F: \mathbb{R} \to [0,1],\ F(x) = P(X < x)$ se numeşte funcţia de repartiţie asociată variabilei aleatoare X.

Operaţii

$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \dots & x_n \\ p_1 & p_2 \dots & p_n \end{pmatrix}$, $\quad p_i \geq 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$
$Y: \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \dots & y_m \\ q_1 & q_2 \dots & q_m \end{pmatrix}$, $\quad q_i \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \quad q_1 + q_2 + \dots + q_m = 1$

1) $a + X: \begin{pmatrix} a + x_1 & a + x_2 \dots & a + x_n \\ p_1 & p_2 \dots & p_n \end{pmatrix}$, a constantă
2) $aX: \begin{pmatrix} ax_1 & ax_2 \dots & ax_n \\ p_1 & p_2 \dots & p_n \end{pmatrix}$, a constantă
3) $X + Y: \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & x_1 + y_2 \dots & x_1 + y_m \dots & x_i + y_j \dots & x_n + y_m \\ p_{11} & p_{12} \dots & p_{1m} \dots & p_{ij} \dots & p_{nm} \end{pmatrix}$, $p_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}$, $p_{11} + p_{12} + \dots + p_{nm} = 1$
4) $XY: \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 \dots & x_1y_m \dots & x_iy_j \dots & x_ny_m \\ p_{11} & p_{12} \dots & p_{1m} \dots & p_{ij} \dots & p_{nm} \end{pmatrix}$, $i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m},\ p_{11} + p_{12} + \dots + p_{nm} = 1$
5) $\frac{X}{Y}: \begin{pmatrix} \frac{x_1}{y_1} & \frac{x_1}{y_2} \dots & \frac{x_1}{y_m} \dots & \frac{x_i}{y_j} \dots & \frac{x_n}{y_m} \\ p_{11} & p_{12} \dots & p_{1m} \dots & p_{ij} \dots & p_{nm} \end{pmatrix}$, $i = \overline{1,n},\ y_j \neq 0, j = \overline{1,m},\ p_{11} + p_{12} + \dots + p_{nm} = 1$
6) $X^k: \begin{pmatrix} {x_1}^k & {x_2}^k \dots & {x_n}^k \\ p_1 & p_2 \dots & p_n \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{N}^*,\ p_i \geq 0,\ i = \overline{1,n},\ p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$

Observaţie. În cazul variabilelor aleatoare independente probabilităţile sunt $p_{ij} = p_i q_j$.

Probleme

1) $X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, $Y: \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$, X şi Y variabile aleatoare independente.
Determinaţi repartiţiile variabilelor aleatoare $X + 2, 3Y, X + Y, Y - X, XY, \frac{X}{Y}, X^2$.
Aflaţi funcţia de repartiţie asociată lui X.

Rezolvare

$X + 2: \begin{pmatrix} -1 + 2 & 0 + 2 & 1 + 2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \to X + 2: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$

$3Y: \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & 3 \cdot 3 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix} \to 3Y: \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$

$X + Y: \begin{pmatrix} -1 + 1 & -1 + 3 & 0 + 1 & 0 + 3 & 1 + 1 & 1 + 3 \\ 0{,}3 \cdot 0{,}6 & 0{,}3 \cdot 0{,}4 & 0{,}2 \cdot 0{,}6 & 0{,}2 \cdot 0{,}4 & 0{,}5 \cdot 0{,}6 & 0{,}5 \cdot 0{,}4 \end{pmatrix} \to$
$X + Y: \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0{,}18 & 0{,}12 & 0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}30 & 0{,}20 \end{pmatrix} \to X + Y: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}18 & 0{,}12 & 0{,}42 & 0{,}08 & 0{,}20 \end{pmatrix}$

$$Y-X:\begin{pmatrix} 1-(-1) & 1-0 & 1-1 & 3-(-1) & 3-0 & 3-1 \\ 0,6\cdot 0,3 & 0,6\cdot 0,2 & 0,6\cdot 0,5 & 0,4\cdot 0,3 & 0,4\cdot 0,2 & 0,4\cdot 0,5 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$Y-X:\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0,18 & 0,12 & 0,30 & 0,12 & 0,08 & 0,20 \end{pmatrix} \rightarrow Y-X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0,30 & 0,12 & 0,38 & 0,08 & 0,12 \end{pmatrix}$$

$$XY:\begin{pmatrix} -1\cdot 1 & -1\cdot 3 & 0\cdot 1 & 0\cdot 3 & 1\cdot 1 & 1\cdot 3 \\ 0,3\cdot 0,6 & 0,3\cdot 0,4 & 0,2\cdot 0,6 & 0,2\cdot 0,4 & 0,5\cdot 0,6 & 0,5\cdot 0,4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$XY:\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0,18 & 0,12 & 0,12 & 0,08 & 0,30 & 0,20 \end{pmatrix} \rightarrow XY:\begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0,12 & 0,18 & 0,20 & 0,30 & 0,20 \end{pmatrix}$$

$$\frac{X}{Y}:\begin{pmatrix} \frac{-1}{1} & \frac{-1}{3} & \frac{0}{1} & \frac{0}{3} & \frac{1}{1} & \frac{1}{3} \\ 0,3\cdot 0,6 & 0,3\cdot 0,4 & 0,2\cdot 0,6 & 0,2\cdot 0,4 & 0,5\cdot 0,6 & 0,5\cdot 0,4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\frac{X}{Y}:\begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{3} & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0,18 & 0,12 & 0,12 & 0,08 & 0,30 & 0,20 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{X}{Y}:\begin{pmatrix} -1 & \frac{-1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0,18 & 0,12 & 0,20 & 0,20 & 0,30 \end{pmatrix}$$

$$X^2:\begin{pmatrix} (-1)^2 & 0^2 & 1^2 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \rightarrow X^2:\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \rightarrow X^2:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Funcţia de repartiţie asociată lui $X:\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$ este

$F:\mathbb{R}\rightarrow[0,1], \qquad F(x)=P(X<x)$

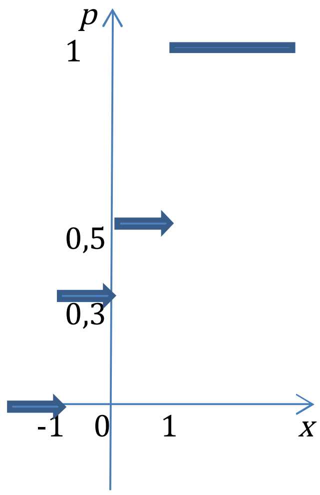
$F(-1)=P(X<-1)=0$

$F(0)=P(X<0)=P(X=-1)=0,3$

$F(1)=P(X<1)=P(X=-1)+P(X=0)=0,3+0,2=0,5$

$F(x)=P(X<x)=0,5+0,5=1,\text{dacă } x>1$

$$F(x)=P(X<x)=\begin{cases} 0, & x<-1 \\ 0,3\,, & -1\le x<0 \\ 0,5\,, & 0\le x<1 \\ 1\,, & x\ge 1 \end{cases}$$



2) $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}$, $Y:\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$, X şi Y variabile aleatoare independente.

Determinaţi repartiţiile variabilelor aleatoare $X+4, -2Y, X+Y, Y-X, XY, \frac{X}{Y}, X^3$.