Profesor Blaga Mirela-Gabriela

Studiul funcţiilor cu ajutorul derivatelor -2-

$f''(x) > 0 \Longrightarrow f\ convexă$
$f''(x) < 0 \Longrightarrow f\ concavă$
$Soluțiile\ ecuației\ f''(x) = 0\ în\ jurul\ cărora\ există\ variație\ de\ semn\ sunt\ puncte\ de\ inflexiune\ ale\ lui\ f.$

$\mathbf{1}.Se\ consideră\ funcția\ f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^x. Să\ se\ arate\ că\ funcția\ f\ este\ convexă.$

$$f(x) = x^x = e^{xlnx}$$
$$f'(x) = e^{xlnx} \cdot (xlnx)' = e^{xlnx} \cdot \left(lnx + x \cdot \frac{1}{x}\right) = e^{xlnx} \cdot (lnx + 1)$$
$$f''(x) = \left(e^{xlnx} \cdot (lnx + 1)\right)' = e^{xlnx} \cdot (lnx + 1) \cdot (lnx + 1) + e^{xlnx} \cdot \frac{1}{x} = e^{xlnx} \cdot \left((lnx + 1)^2 + \frac{1}{x}\right) > 0$$
$f''(x) > 0, x \in (0,\infty)\ deci\ f\ este\ convexă\ pe\ (0,\infty).$

$\mathbf{2}.Să\ se\ determine\ punctele\ de\ inflexiune\ ale\ graficului\ funcției\ f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = e^{\frac{1}{x}}.$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} \ \to\ f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{-1}{x^2} + e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{2x}{x^4} = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1 + 2x}{x^4}$$
$$f''(x) = 0 \ \to\ 2x + 1 = 0 \ \to x = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}^*$$
$$e^{\frac{1}{x}} > 0, x^4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$$

x	$-\infty$			$-\frac{1}{2}$				0						∞
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	|	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

$A\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right) este\ punct\ de\ inflexiune.$

$\mathbf{3}.Fie\ funcția\ f:(0,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\ .Să\ se\ arate\ că\ funcția\ f'\ este\ strict\ crescătoare.$

$$f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \ \to\ f''(x) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} > 0, \forall x \in (0,\infty)$$
$f''(x) > 0 \to\ f'\ este\ strict\ crescătoare$

$\mathbf{4}.Se\ consideră\ funcția\ f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}.$
$Determinați\ intervalele\ de\ convexitate/concavitate\ ale\ lui\ f.$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 + x + 1}{x}\right)' = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$
$$f''(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)' = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

x	$-\infty$				0				∞
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	|	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$					|				

$f este\ concavă\ pe\ (-\infty, 0)\ și\ convexă\ pe\ (0,\infty).$

$\mathbf{5}.Să\ se\ arate\ că\ funcția\ f:[-1,1] \to \mathbb{R}, f(x) = (x - 1)arcsinx\ \ este\ convexă.$

$$f'(x) = arcsinx + (x - 1)\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} + (x - 1)\frac{\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}{(1 - x^2)} = \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{x}{(1 + x)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2 + x}{(1 + x)\sqrt{1 - x^2}} > 0$$

$\to f convexă, \forall x \in (-1, 1)$